

Messabweichungen, Fehlerrechnung und lineare Regression

Jeder Messwert ist mit Messabweichungen (früher Fehler genannt) behaftet. Die Fehlerrechnung beschreibt die Fortpflanzung einzelner Messabweichungen. Die lineare Regression ist ein elementares Werkzeug in der Datenauswertung.

1 Lernziele

- Zufällige **Messabweichungen** (Fehler) sind bei wiederholten Messungen oft **normalverteilt** (Gaussverteilung). Durch Mittelwertbildung kann die Genauigkeit des Messwertes erhöht werden. Die **Standardabweichung** ist ein Maß für die Streuung um den **Mittelwert**.
- In Formeln mit mehreren Messgrößen pflanzen sich Messabweichungen fort. Die resultierende größtmögliche Messabweichung kann mittels partieller Ableitungen der Formel und den gegebenen oder abgeschätzten Einzelfehlern bestimmt werden, auch **Fehlerfortpflanzungsgesetz** genannt.
- Ist ein linearer Zusammenhang zwischen zwei Größen vorhanden, so berechnet die **lineare Regression** den optimalen Anstieg (Steigung) und den y-Achsen-(Ordinaten)Abschnitt.

2 Experimenteller Aufbau – Mathematisches Pendel

- Stativ mit Fadenpendel und Probenkörper $h = 20.0 \pm 0.1$ mm
- Maßband mit einer Ablesegenauigkeit von 1 mm
- Stopwatch-Programm auf dem Computer zur Zeitmessung
- Computer mit Origin®-Software

3 Messungen

- Messen Sie die Pendellänge L und schätzen Sie die zugehörige Messabweichung $u(L)$. Bestimmen Sie mindestens 200-mal die Dauer T einer Periode Ihres Fadenpendels.
- Bestimmen Sie die Periodendauer Ihres Pendels aus der Zeitdauer T_{50} für 50 Schwingungen zur selben Pendellänge wie in 3a). Schätzen Sie die zugehörige Messabweichung $u(T_{50})$.
- Messen Sie die Periodendauer $T(L)$ Ihres Pendels für mindestens 5 verschiedene Pendellängen L . Entscheiden und begründen Sie, ob Sie die Methode nach 3a) oder 3b) benutzen.

4 Zusätzliche Messungen - keine

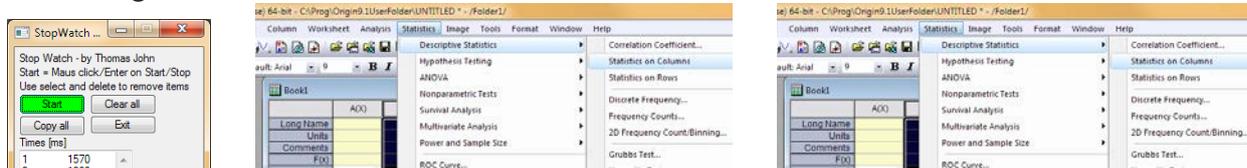
5 Versuchsdurchführung

Der Auslenkwinkel des Pendels sollte maximal 5° betragen, wieso eigentlich? Zur Aufnahme der Periodendauern steht ein Stoppuhr-Programm zur Verfügung. Wenn im Programm der Fokus auf Start/Stop zeigt, lösen wiederholte Enter-Eingaben den Start bzw. Stop der Uhr aus. Somit wird in 3a) eine Periodendauer gemessen, eine ausgelassen usw. Sie können zwischendurch pausieren oder den Partner wechseln. Eine Periodendauer misst sich am genauesten, wenn Sie den wiederholten Durchgang durch dieselbe Auslenkung bei hoher Pendelgeschwindigkeit messen. Bei welchem Auslenkwinkel ist die Geschwindigkeit am höchsten?

6 Auswertungen

Die mit dem Stoppuhr-Programm ermittelten Zeiten können Sie in die Zwischenablage kopieren und im Programm Origin® in die Spalten eines **Worksheet** kopieren. Von der Datenauswertungssoftware Origin® wird nur ein kleiner Teil der verfügbaren Funktionen benötigt. Zur Ermittlung statistischer Größen einer

Spalte (column) markieren Sie diese und benutzen Statistics => Descriptive Statistics => Statistics on Columns. Es entstehen neue Reiter im aktiven Workbook. Um das Histogramm eines markierten Spaltendatensatzes zu erzeugen, benutzen Sie die Zeichenfunktion Plot => Statistics => Histogramm.



- Berechnen Sie mit Origin[®] aus den Messdaten von 3a) den Mittelwert \bar{T} , die Standardabweichung s_T und die Unsicherheit des Mittelwertes $s_{\bar{T}} = s_T/\sqrt{N}$. Erzeugen Sie das zugehörige Histogramm mit einer sinnvollen bin-Breite und tragen Sie obige drei Größen und die zugehörige Normalverteilung in der Abbildung ein.
- Erstellen Sie ein neues Workbook mit den ersten 10 Messdaten aus 3a) und bestimmen Sie ebenfalls den Mittelwert, die Standardabweichung und die Unsicherheit des Mittelwertes. Vergleichen Sie diese mit den Werten von 6a).
- Bestimmung der Schwerebeschleunigung:* Die Periodendauer T des mathematischen Fadenpendels und die Auflösung nach der Schwerebeschleunigung g sind gegeben durch

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{und} \quad g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \quad . \quad (1)$$

Berechnen Sie die lokale Schwerebeschleunigung g aus \bar{T} aus der Mittelwertbildung von 6a) und der ermittelten Periodendauer nach Aufgabe 3b).

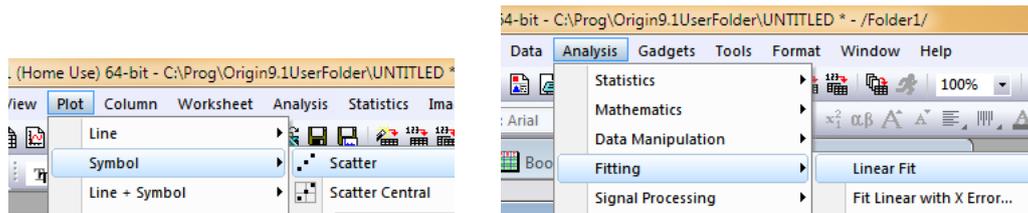
- Fehlerrechnung:* Die Ermittlung der Messabweichungen $u(L)$ für die Pendellänge L bis zum Schwerpunkt des Probenkörpers und $u(T_{50})$ für 50 Periodendauern in 3b) ist eine Abschätzung vor Ort, keine Berechnung. Die Messabweichung in der Periodendauer in 6a) ist $s_{\bar{T}}$ und in 3b) ist $u(T) = u(T_{50})/50$. Aus diesen Messabweichungen ergeben sich die absolute und die relative Messabweichung in der Schwerebeschleunigung g zu

$$u(g) = \frac{4\pi^2}{T^2}u(L) + \frac{8\pi^2 L}{T^3}u(T) \quad \text{und} \quad u_{rel}(g) = \frac{u(g)}{g} \times 100\% \quad . \quad (2)$$

Berechnen Sie die zwei Messunsicherheiten und tragen Sie diese mit den g -Werten ebenfalls in Ihr Histogramm ein.

- Lineare Regression:* Wir wollen das Quadrat der Periodendauer $T^2(L)$ als Funktion der Pendellänge auftragen. Nach Gl. (1) sollte dies ein linearer Zusammenhang nach $y = ax + b$ sein. Aus dem Anstieg $a = 4\pi^2/g$ lässt sich g ermitteln.

In einem Worksheet können Sie neue Spalten durch Rechtsklick =>Add New Column einfügen. Sie können Spaltenwerte aus bestehenden errechnen, indem Sie diese Spalte markieren und Rechtsklick => Set New Columns Values. In unserem Fall $col(C)=(col(2)/1000)^2$, d.h. die Zeit in Sekunden und dieses Ergebnis zum Quadrat. Wenn die zugehörige Länge L als x -Spalte in Metern eingetragen ist, wird mit der berechneten Spalte mit Plot=>Symbol=>Scatter ein Diagramm Ihrer Messwerte angelegt. Ist das Diagrammfenster aktiv, so wird mit Analysis => Fitting => Linear Fit eine Regression durchgeführt. Die Regressionsparameter wie Anstieg (Slope) und y -Achsenabschnitt (Intercept) werden im Diagramm und in neuen Reitern des zugehörigen Books ausgegeben. Berechnen Sie g und tragen Sie dieses in Ihre Regressionsabbildung ein.



7 Zusätzliche Auswertungen

- Erstellen Sie aus Ihrem Histogramm eine Wahrscheinlichkeitsdichtedarstellung. Diese ist normiert, so dass das Integral über die Dichte 1 ergibt. Variieren Sie im Histogramm die bin-Breiten für eine aussagekräftige Darstellung. Ermitteln Sie die Parameter μ und σ einer angepassten Gaussverteilung (Nonlinear Curve Fit) an Ihre Wahrscheinlichkeitsdichtedarstellung. Vergleichen Sie diese Werte mit dem berechneten Mittelwert und der Standardabweichung aus der Aufgabenstellung 6a). Was ist der Unterschied zwischen dem μ und dem Mittelwert beziehungsweise zwischen σ und der berechneten Standardabweichung aus dem Datensatz? Wann unterscheiden sich die Werte deutlich?
- Schätzen Sie durch Variation der Steigungen der Regressionsgraden in 6e) die mögliche Messabweichung $u(g)$ für die von Ihnen bestimmte Schwerebeschleunigung g .
- Tragen Sie Ihre gemessenen Periodendauern $T(L)$ in 6e) über der Pendellänge (nicht das Quadrat der Periodendauern) auf und führen Sie eine Anpassung an eine Wurzelfunktion durch (Nonlinear Curve Fit), um die Schwerebeschleunigung zu ermitteln.

8 Literatur

Bücher mit URL können kostenlos aus dem Internet heruntergeladen werden, wenn Sie sich im Netz der Universität befinden. Die Referenz [2] ist ein allgemeines Praktikumbuch, welches bei vielen Versuchen sehr hilfreich ist. Die Reihenfolge spiegelt die Relevanz für diesen Versuch wieder.

- [1] Skript - Praktikum Physik - Universität Oldenburg. URL: http://www.uni-oldenburg.de/fileadmin/user_upload/physik/ag/physikpraktika/download/GPR/pdf/Fehlerrechnung.pdf.
- [2] W. Schenk. *Physikalisches Praktikum*. Springer Spektrum, 2014. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-00666-2>.
- [3] M. Erdmann. *Experimentalphysik 5 : Moderne Methoden der Datenanalyse Physik Denken*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2013. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17294-6>.
- [4] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer Spektrum, 2015. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5>.
- [5] P. A. Tipler. *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Springer Spektrum, 2015. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-54166-7>.

9 Vorbereitung und Fragen

Als Vorbereitung auf diesen Versuch wird eine einmalige Vorlesung angeboten. In dieser werden die konkreten Details und mathematischen Hintergründe dieses Versuches beschrieben. Wenn Sie nicht daran teilnehmen konnten, setzen Sie sich mit der angegebenen Literatur auseinander und erarbeiten Sie sich vor Versuchsantritt die Schwerpunkte:

- Arten von Messabweichungen
- Mittelwert, Standardabweichung und Standardabweichung des Mittelwertes

- zufällige Messabweichungen, Normalverteilung, Aussehen, Erwartungswert, Standardabweichung und Varianz
- absolute und relative Messabweichung
- Fehlerfortpflanzung und Größtfehler bei zusammengesetzten Messgrößen in Formeln
- Linearisierung (zum Beispiel Auftragung $T^2(L)$)
- Lineare Regression $y = ax + b$, Anstieg a (*Slope*), y -Achsenabschnitt b (*Intersection*) und deren Einheiten
- Festlegung des y -Achsenabschnitts in der Regression und die physikalische Entsprechung

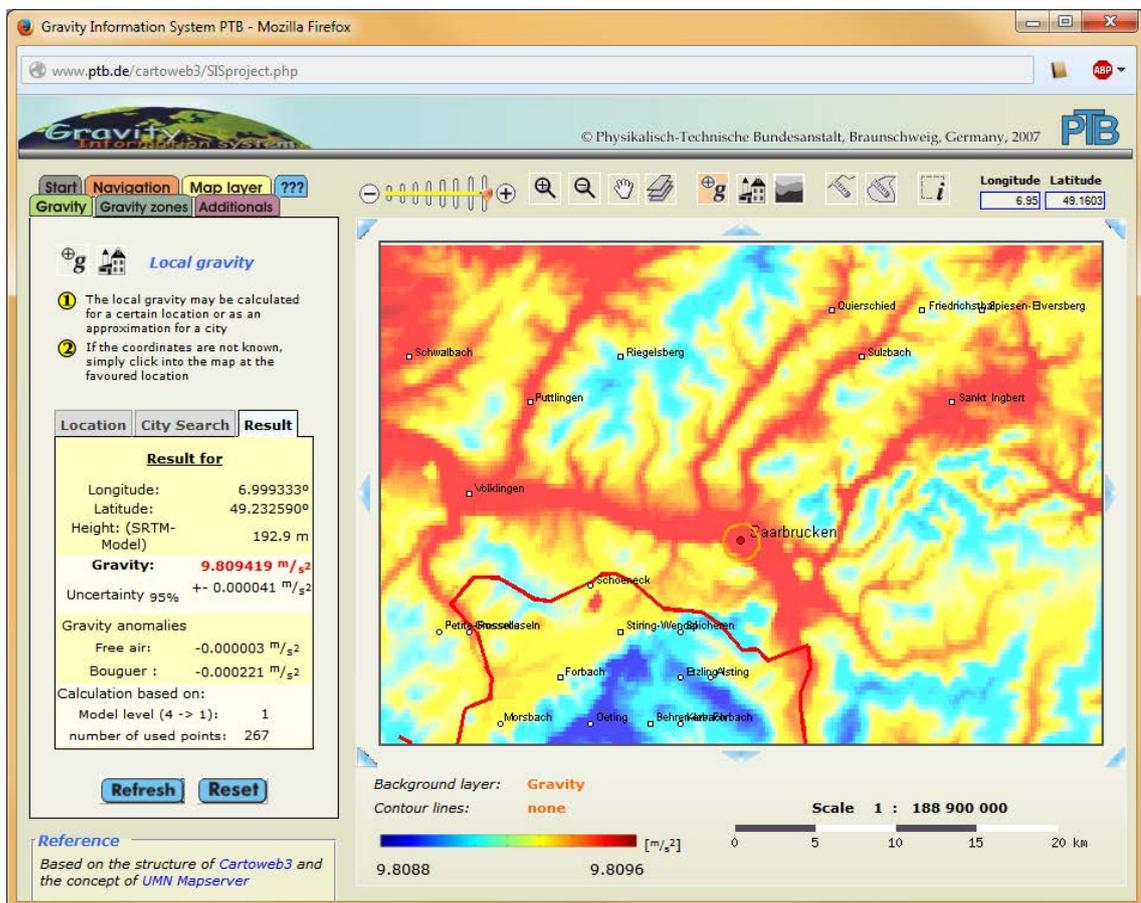
10 Zusatzmaterial

- Die Messung des lokalen Schwerfeldes der Erde wird Gravimetrie bezeichnet. Sie gibt Hinweise auf eventuell vorhandene Erzlagerstätten.
- Die Schwerebeschleunigung setzt sich aus dem lokalen Gravitationsfeld und der Zentrifugalbeschleunigung zusammen. Letztere hat ihr Maximum am Äquator und trägt dort bei der Erde zu -0.34% bei.

Weitere Einflüsse sind

- die Abplattung der Erde
- die Abnahme mit zunehmender Höhe = Abstand zum Erdmittelpunkt
- das Vorhandensein dichterere Gesteine im Untergrund oder von Bergmassiven in der Umgebung
- ...

- Das Schwerfeld um Saarbrücken ist



siehe bei der Physikalisch Technischen Bundesanstalt
<http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php>