# Messunsicherheiten, Fehlerrechnung und lineare Regression

Jeder Messwert ist mit einer Messabweichung (früher Fehler genannt) behaftet. Die Breite der Verteilung der Messabweichungen ist die Messunsicherheit. Die Fehlerrechnung beschreibt die Fortpflanzung einzelner Messunsicherheiten. Die lineare Regression ist ein elementares Werkzeug in der Datenauswertung.

## 1 Lernziele

- Zufällige Messabweichungen (Fehler) sind bei wiederholten Messungen oft normalverteilt (gaußverteilt). Durch Mittelwertbildung kann die Genauigkeit des Messwertes erhöht werden.
- Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung um den Mittelwert.
- In Formeln mit mehreren Messgrößen pflanzen sich Messunsicherheiten fort. Die resultierende größtmögliche Messunsicherheit kann mittels partieller Ableitungen der beschreibenden Formel und den gegebenen oder abgeschätzten Einzelmessunsicherheiten bestimmt werden. Dies wird Fehlerfortpflanzungsgesetz genannt.
- Die lineare Regression berechnet den Anstieg $b$ und den Ordinaten(y-Achse)-Abschnitt $a$ um die Daten mit einem linearen Zusammenhang $y = a + bx$ zu beschreiben.

## 2 Experimenteller Aufbau – Mathematisches Pendel

- Stativ mit Fadenpendel und Probenkörper $h = (20.0 \pm 0.1)$ mm
- Maßband mit einer Ablesegenauigkeit von 1 mm
- `StopWatch`-Programm auf dem Computer zur Zeitmessung
- Computer mit Auswerte-Software

## 3 Messungen

a) Messen Sie die Pendellänge $L$ aus dem Abstand zwischen dem Aufhängepunkt und dem Schwerpunkt des Probenkörpers. Schätzen Sie die zugehörige Messunsicherheit $u(L)$. Bestimmen Sie mindestens 200-mal die Dauer $T$ *einer* Periode Ihres Fadenpendels.
$\Rightarrow$ Auswertung 5a).

b) Bestimmen Sie die Periodendauer Ihres Pendels aus der *gesamten* Zeitdauer $T_{50}$ für 50 Perioden zur selben Pendellänge wie in 3a). Schätzen Sie die zugehörige Messunsicherheit $u(T_{50})$.
$\Rightarrow$ Auswertung 5b).

c) Messen Sie die Periodendauer $T(L)$ Ihres Pendels für mindestens 5 weitere Pendellängen $L$ zwischen 10 cm und 1 m. Entscheiden und begründen Sie in Ihrem Protokollbuch, ob Sie zur Bestimmung der Periodendauer die Methode nach 3a) oder 3b) benutzen.
$\Rightarrow$ Auswertung 5c).

## 4 Versuchsdurchführung

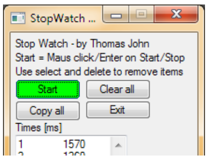
Stellen Sie zu beginn eine Pendellänge von zirka 80 cm ein. Der Auslenkwinkel des Pendels bei der Schwingung sollte maximal 5° betragen. Wieso eigentlich? Schätzen Sie 5° ab. Zur Aufnahme der Periodendauern steht das Programm `StopWatch` zur Verfügung. Mit diesem Programm lösen wiederholte Enter-Eingaben den Start bzw. Stop der Uhr aus. Somit wird in 3a) eine Periodendauer gemessen, eine ausgelassen usw. Sie können zwischendurch pausieren oder den Partner wechseln. Eine Periodendauer misst sich am genausten, wenn Sie den wiederholten Durchgang durch dieselbe Auslenkung bei hoher Pendelgeschwindigkeit messen. Bei welchem Auslenkwinkel ist die Geschwindigkeit am höchsten?

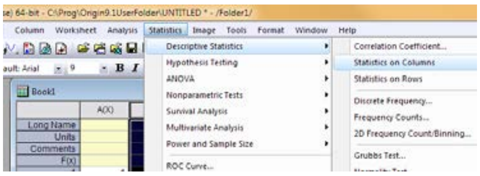
## 5 Auswertungen

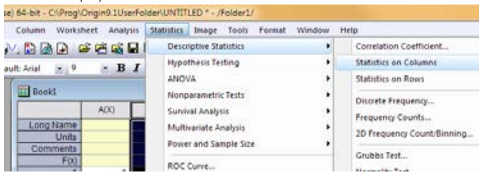
Die mit dem `StopWatch`-Programm ermittelten Zeiten können Sie in die Zwischenablage kopieren und im Programm Origin® in die Spalten eines `Worksheet` einfügen (erste nicht gelbe Zelle A1). Vergeben Sie aussagekräftige Namen. Von der Datenauswertungssoftware Origin® wird nur ein kleiner Teil der verfügbaren Funktionen benötigt.

zu a) **Histogramm und statistische Größen**

Stellen Sie Ihre Daten als `Scatter-Plot` dar in dem Sie die Spalte mit den Periodendauern markieren und
`Plot -> Symbol -> Scatter` wählen.
Zur Ermittlung statistischer Größen einer Spalte (column) markieren Sie diese und benutzen
`Statistics -> Descriptive Statistics -> Statistics on Columns (Open Dialog)`.
Berechnen Sie aus allen gemessenen Periodendauern von 3a) den Mittelwert $\langle T\rangle$, die Standardabweichung $s_T$ und die Unsicherheit des Mittelwertes $u(\langle T\rangle) = s_{\langle T\rangle} = s_T/\sqrt{N}$.








Um das Histogramm zu erzeugen, markieren Sie die Spalte und benutzen Sie die Zeichenfunktion
`Plot -> Statistics -> Histogram`.
Erzeugen Sie das zugehörige Histogramm mit einer sinnvollen bin-Breite. Fügen Sie eine Anpassung an eine Normalverteilung der Abbildung hinzu mit `Rechter Mausklick -> Plot Details -> Data -> Distribution Curve -> Normal`.
Tragen Sie obige drei statistische Größen als Text und als vertikale Linien in Ihr Histogramm ein und beschriften Sie die Abbildung vollständig.
Erstellen Sie ein weiteres Datenblatt welches nur die ersten 10 Periodendauern enthält. Berechnen Sie von dieser Spalte ebenfalls $\langle T\rangle$, $s_T$ und $u(\langle T\rangle)$. Vergleichen Sei diese mit den Größen aus dem vollem Datensatz mit 200 Einträgen. Welche Aussagen können Sie machen?

zu b) **Bestimmung der Schwerebeschleunigung**

Die mittlere Periodendauer $\overline{T_{50}}$ aus der gemessenen Zeit für 50 Schwingungen ergibt sich zu $\langle T_{50}\rangle = T_{50}/50$. Der Zusammenhang zwischen der Periodendauer einer Pendelschwingung und der lokalen Schwerebeschleunigung $g$ ist

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{bzw.} \quad g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \tag{1}$$

mit der Pendellänge $L$ und der Periodendauer $T$.
Berechnen Sie $g$ mit $T = \langle T\rangle$ aus 5a) und aus $\langle T_{50}\rangle$ aus 5b) und tragen Sie beide Werte als Text in Ihrem Histogramm ein.

**Fehlerrechnung**

Für der Ermittlung der Messunsicherheiten Ihrer zwei $g$ Bestimmungen benötigen Sie die abgeschätzte Messunsicherheit $u(L)$ und die Unsicherheit der mittleren Periodendauer $u(\langle T\rangle)$ beziehungsweise $u(\langle T_{50}\rangle)$. Erstere ist die Unsicherheit des Mittelwertes $u(\langle T\rangle) = s_{\langle T\rangle}$. Die zweite ist ein $1/50$ der *Messunsicherheit einer einzelnen Zeitmessung* und somit $u(\langle T_{50}\rangle) = s_T/50$. Notieren Sie, welche Unsicherheit größer ist? Was würden sie vorschlagen, wenn die Messunsicherheit noch weiter verkleinert werden soll?
Die Unsicherheit $u(g)$ der ermittelten Schwerebeschleunigung ergibt sich durch Fehlerfortpflanzung:

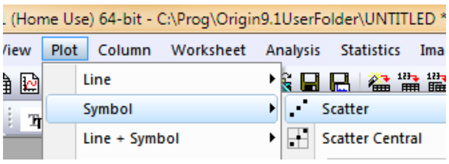
$$u(g) = \frac{4\pi^2}{T^2}u(L) + \frac{8\pi^2 L}{T^3}u(T) \quad \text{und} \quad u_{rel}(g) = \frac{u(g)}{g}\cdot 100\% \quad . \tag{2}$$

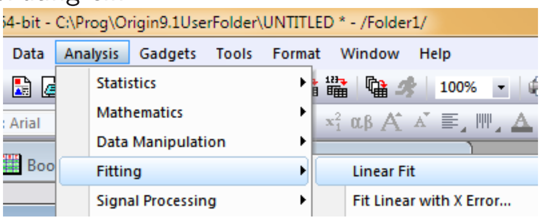
Berechnen Sie die zugehörigen Messunsicherheiten $u(g)$ für die zwei Messunsicherheiten $u(\langle T\rangle)$ und $u(\langle T_{50}\rangle)$ und Tragen Sie diese Größen als Text in Ihr Histogramm ein und drucken Sie es aus. Welche Messabweichung $u(L)$ oder $u(T)$ beziehungsweise $u(\langle T_{50}\rangle)$ hat jeweils den größeren Einfluss auf die Unsicherheit der bestimmten Schwerebeschleunigung $g$? Welche der beiden Methoden zur Bestimmung von $T$ liefert ein genaueres $g$?

zu c) **Lineare Regression**

Das Quadrat der Periodendauer $T^2(L)$ ist eine lineare Funktion in der Pendellänge $L$ mit dem Anstieg $b = 4\pi^2/g$, siehe Gl. (1). Welche Einheit hat $b$? Die lineare Regression mit $y = a + bx$ berechnet das optimale $a$ und $b$ zu den Wertepaaren $\{x_i = L_i\,; y_i = T^2(L_i)\}$. Aus $b$ lässt sich $g$ ermitteln. Welche Einheit hat $a$ und welchen Wert sollte $a$ haben?

In einem Worksheet können Sie neue Spalten durch `Rechtsklick ->Add New Column` einfügen. Sie können neue Spaltenwerte aus bestehenden errechnen, indem Sie die neue Spalte markieren und `Rechtsklick -> Set Columns Values` ausführen. In unserem Fall `col(3)=(col(2)/1000)^2`, d.h. die Zeit von Millisekunden in Sekunden umrechnen und dieses Ergebnis quadrieren. Die $x$-Spalte beinhaltet die zugehörigen Längen $L$ in Metern. Durch Markieren der berechneten Spalte und `Plot -> Symbol -> Scatter` erhalten Sie ein Diagramm Ihrer Messwerte $T^2(L)$. Mit `Analysis ->Fitting -> Linear Fit (Open Dialog)` werden: a) Parameter eingestellt, b) die Regressionparameter $a, b$ berechnet, c) die `Lineare Regression` als Linie in der Abbildung eingetragen und d) alle Parameter in dem `Result Log` ausgegeben. Berechnen Sie aus den Regressionsparametern wiederum die Schwerebeschleunigung $g$ und tragen Sie diese *sinnvoll gerundet* als Text in Ihre Regressionsabbildung ein.




## 6 Zusätzliche – freiwillige – Auswertungen

a) Tragen Sie Ihre gemessenen Periodendauern $T(L)$ in 5 über der Pendellänge (nicht das Quadrat der Periodendauern) auf und führen Sie eine Anpassung an eine Wurzelfunktion $T(L) = \tilde{a}\sqrt{L}$ durch. Erstellen Sie dazu mit (`Nonlinear Curve Fit`), eine benutzerdefinierte Anpassungsfunktion und berechnen Sie aus $\tilde{a}$ die Schwerebeschleunigung.

b) Erstellen Sie aus Ihrem Histogramm in 5 eine Wahrscheinlichkeitsdichtedarstellung $p(T)$. Diese ist normiert, so dass das Integral über die Funktion, also die Fläche unter $p(T)$ den Wert 1 ergibt. Variieren Sie dazu in Ihrem Histogramm die `bin`-Breiten für eine aussagekräftige Darstellung. Durch `Rechtsklick => Go to Bin-Worksheet` erhalten Sie die Tabelle mit den Histogrammwerten. In einer zusätzlichen Spalte berechnen Sie $p(T)$ mit `col(Counts)/N*binwith` mit `N`, der Anzahl Ihrer Messpunkten und `binwith` für Ihre gewählte Binbreite. Stellen Sie $p(T)$ als Punktdiagramm dar. Ermitteln Sie die Parameter $\mu$ und $\sigma$ durch Anpassung an eine Gaussverteilung (`Nonlinear Curve Fit`) an Ihre Wahrscheinlichkeitsdichtedarstellung $p(T)$. Vergleichen Sie diese Werte mit dem berechneten Mittelwert und der Standardabweichung aus der Aufgabenstellung 5. Was ist der Unterschied zwischen dem $\mu$ und dem Mittelwert beziehungsweise zwischen $\sigma$ und der berechneten Standardabweichung aus dem Datensatz? Gibt es Verteilungen, wo sich die Werte deutlich voneinander unterscheiden?

## 7 Literatur

Wenn Sie sich im Internet der Universität befinden, können Bücher mit URL kostenlos heruntergeladen werden. Die Referenz [2] ist ein allgemeines Praktikumsbuch, welches bei vielen Versuchen hilfreich ist.

[1] Skript - Praktikum Physik - Universität Oldenburg. URL: `http://www.uni-oldenburg.de/fileadmin/user_upload/physik/ag/physikpraktika/download/GPR/pdf/Fehlerrechnung.pdf`.

[2] W. Schenk und F. Kremer (Hrsg.) *Physikalisches Praktikum*. Springer, 14. Auflage, 2014. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-00666-2`.

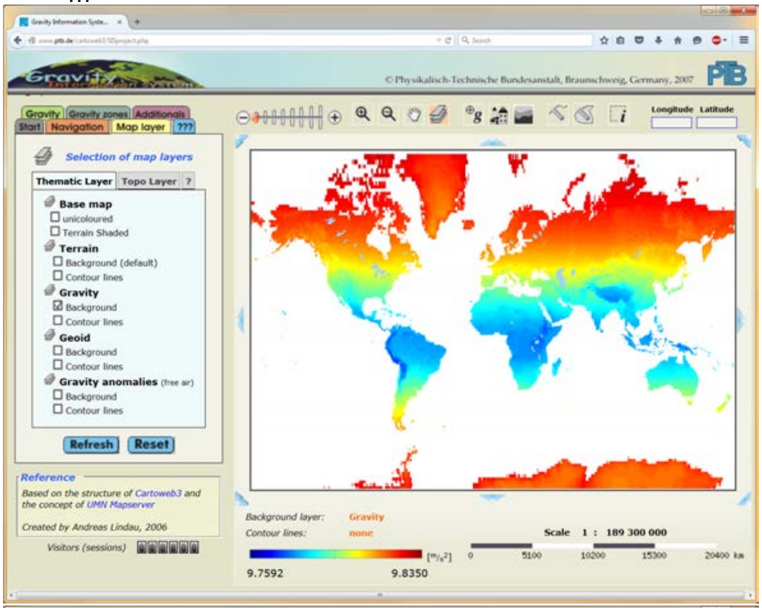
[3] M. Erdmann. *Experimentalphysik 5 - Moderne Methoden der Datenanalyse Physik Denken*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2013. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17294-6`.

[4] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer, 25. Auflage, 2015. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5.

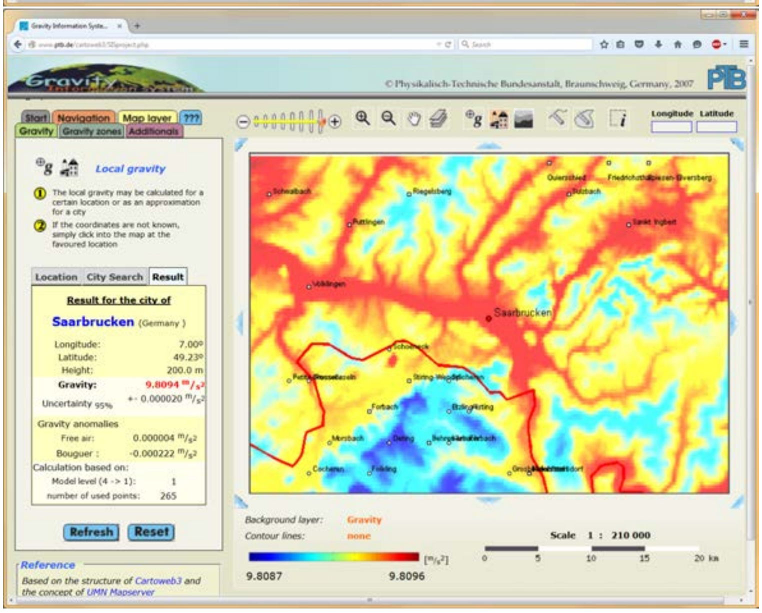
[5] P. A. Tipler. *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Springer Spektrum, 2015. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-54166-7.

## 8 Zusatzmaterial

- Die Schwerebeschleunigung setzt sich aus dem lokalen Gravitationsfeld und der Zentrifugalbeschleunigung zusammen. Letztere hat ihr Maximum am Äquator und trägt dort bei der Erde zu $-0.34\%$ bei.
- Die Messung des lokalen Schwerefeldes der Erde wird Gravimetrie bezeichnet. Die Hauptkomponente in den lokalen Variationen der Fallbeschleunigung $g$ sind Berge und Täler. Sie gibt aber auch Hinweise auf eventuell vorhandene Erz- oder Öllagerstätten im Untergrund. Beim Vorhandensein von Erzen oder Öl, ist die Fallbeschleunigung an der Oberfläche minimal größer bzw. kleiner als aus dem Obeflächen profiel zu erwarten wäre. Weitere Einflüsse sind
  - die Abplattung der Erde
  - die Abnahme mit zunehmender Höhe = Abstand zum Erdmittelpunkt
  - ...




Das Schwerefeld der Erde ist am Äquator kleiner als an den Polen.




Das lokale Schwerefeld um Saarbrücken zeigt die Abnahme von $g$ mit der Höhe.

siehe bei der Physikalisch Technischen Bundesanstalt `http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php`