Messunsicherheiten, Fehlerrechnung und lineare Regression

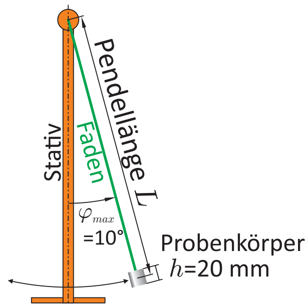
Jeder Messwert ist mit einer Messabweichung behaftet. Die Breite der Verteilung der Messabweichungen ist die Messunsicherheit (früher Messfehler genannt). Die Fehlerrechnung beschreibt die Fortpflanzung einzelner Messunsicherheiten. Die lineare Regression ist ein elementares Werkzeug in der Datenauswertung um Parameter aus einem Datensatz zu extrahieren.

1 Lernziele

- Zufällige Messabweichungen sind bei wiederholten Messungen oft normalverteilt (gaußverteilt).
- Durch Mittelwertbildung kann die Genauigkeit des Messwertes erhöht werden.
- Die Standardabweichung s_X ist ein Maß für die Streuung um den Mittelwert.
- Die Standardabweichung des Mittelwertes $s_{\langle X \rangle}$ gibt die Messunsicherheit von diesem an.
- In Formeln mit mehreren Messgrößen pflanzen sich Messunsicherheiten fort. Die resultierende größtmögliche Messunsicherheit kann mittels partieller Ableitungen der beschreibenden Formel und den gegebenen oder abgeschätzten Einzelmessunsicherheiten bestimmt werden.
- Die lineare Regression berechnet den Anstieg b und den Ordinaten(y-Achse)-Abschnitt a um die Daten mit einem linearen Zusammenhang $y = a + bx$ zu beschreiben.

2 Experimenteller Aufbau – Mathematisches Pendel

- Stativ mit Fadenpendel und Probenkörper $h = (20.0 \pm 0.1)$ mm
- Maßband mit einer Ablesegenauigkeit von 1 mm
- `StopWatch`-Programm auf dem Computer zur Zeitmessung
- Computer mit Auswerte-Software



3 Versuchsvorbereitung

Stellen Sie zu beginn eine Pendellänge L von zirka 80 cm ein. Der Auslenkwinkel des Pendels bei der Schwingung sollte maximal 10° betragen. Wieso? Zur Aufnahme der Periodendauern steht das Programm `StopWatch` zur Verfügung. Mit diesem Programm lösen wiederholte Enter-Eingaben den Start bzw. Stop der Uhr aus. Somit wird in 4a) eine Periodendauer gemessen, eine ausgelassen usw. Sie können zwischendurch pausieren oder den Partner wechseln. Eine Periodendauer misst sich am genausten, wenn Sie den wiederholten Durchgang durch dieselbe Auslenkung bei hoher Pendelgeschwindigkeit messen.

4 Messungen

a) Messen Sie die Pendellänge L aus dem Abstand zwischen dem Aufhängepunkt und dem Schwerpunkt des Probenkörpers. Schätzen Sie die zugehörige Messunsicherheit $u(L)$. Bestimmen Sie mindestens 200-mal die Dauer T_i *einer* Periode Ihres Fadenpendels.
$\Rightarrow$ Auswertung 5a).

b) Bestimmen Sie zur selben Pendellänge wie in 4a) die Periodendauer $T_{50} = \Delta t_{50}/50$ aus der *gemessenen* Zeitdauer Δt_{50} für 50 Perioden.
$\Rightarrow$ Auswertung 5b).

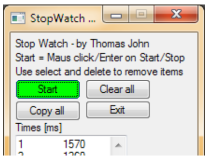
c) Messen Sie die Periodendauer $T(L)$ Ihres Pendels für mindestens 5 Pendellängen L_i zwischen 10 cm und 1 m. Entscheiden und begründen Sie in Ihrem Protokollbuch, ob Sie zur Bestimmung der Periodendauer die Methode nach 4a) oder 4b) benutzen.
$\Rightarrow$ Auswertung 5c).

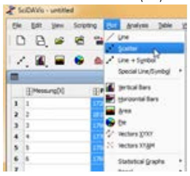
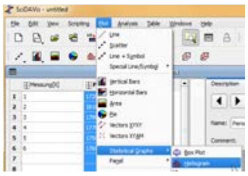
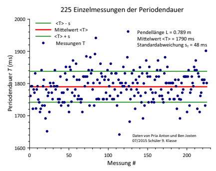
5 Auswertungen

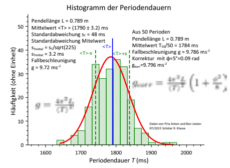
Die mit dem `StopWatch`-Programm ermittelten Zeiten können Sie in die Zwischenablage kopieren und im Programm `SciDAVis` in die Spalten einer `Tabelle` einfügen. Vergeben Sie aussagekräftige Spaltennamen.

zu 4a) **Histogramm und statistische Größen**

Stellen Sie Ihre Daten als `Scatter-Plot` (Punktdiagramm) dar, indem Sie die Spalte mit den Periodendauern markieren und `Plot -> Scatter` wählen. Mit dem `Data Reader` können Sie offensichtliche Fehlmessungen erfassen und löschen.
Zur Ermittlung statistischer Größen einer Spalte (`column`) markieren Sie diese und benutzen `Analysis -> Statistics on Columns`. Notieren Sie in ihrem Protokollbuch die mittlere Periodendauer $\langle T \rangle$, die Standardabweichung s_T und berechnen Sie die Standardabweichung (Unsicherheit) des Mittelwertes $s_{\langle T \rangle} = s_T/\sqrt{N} = u(\langle T \rangle)$.





Um das Histogramm zu erzeugen, markieren Sie die Spalte und benutzen Sie die Zeichenfunktion `Plot -> Statistical Graphs -> Histogram`. Erzeugen Sie das zugehörige Histogramm mit einer sinnvollen `bin`-Breite. Fügen Sie eine Anpassung an eine Gaussverteilung der Abbildung hinzu mit `Rechter Mausklick -> Analyze -> Fit Wizard -> Build-in -> GaussAmp`.
Tragen Sie $\langle T \rangle$,s_T und $s_{\langle T \rangle}$ als Text und als vertikale Linien in Ihr Histogramm ein und beschriften Sie die Abbildung vollständig.
Erstellen Sie ein weiteres Datenblatt welches nur die ersten 10 Periodendauern enthält. Berechnen Sie von diesen Daten ebenfalls $\langle T \rangle$, s_T und $s_(\langle T \rangle)$. Vergleichen Sei diese mit den Größen aus dem vollem Datensatz. Welche Aussagen können Sie machen?

zu b) **Bestimmung der Schwerebeschleunigung g**

Der Zusammenhang zwischen der Periodendauer der Pendelschwingung und der lokalen Schwerebeschleunigung g ist

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{bzw.} \quad g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \tag{1}$$

mit der Pendellänge L und der Periodendauer T.
Berechnen Sie g mit $T = \langle T \rangle$ aus 5a) und mit $T = T_{50}$ aus 5b)

Fehlerrechnung

Für der Ermittlung der Messunsicherheiten der zwei bestimmten g-Werte benötigen Sie die abgeschätzte Messunsicherheit $u(L)$ und die Unsicherheit der Periodendauer $u(T)$. Bei der ersten Methode mit $T = \langle T \rangle$ ist die Unsicherheit der Periodendauerbestimmung $u(\langle T \rangle) = s_{\langle T \rangle}$ die *Unsicherheit des Mittelwertes*. Bei der zweiten Methode ist $u(T_{50}) = s_T/50$. In Worten, die Unsicherheit ist ein $1/50$ der *Messunsicherheit einer einzelnen Zeitintervallmessung*. Welche Unsicherheit ist größer? Welche Methode schlagen sie vor, wenn die Messunsicherheit noch weiter verkleinert werden soll?
Die Unsicherheit $u(g)$ der Schwerebeschleunigung hat zwei Anteile, von $u(L)$ und von $u(T)$:

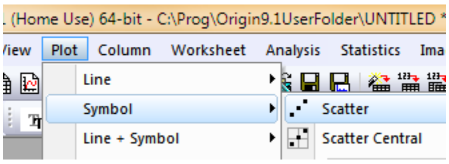
$$u_{\text{abs}}(g) = \frac{4\pi^2}{T^2}u(L) + \frac{8\pi^2 L}{T^3}u(T) \quad \text{und} \quad u_{\text{rel}}(g) = \frac{u(g)}{g} \cdot 100\% \quad . \tag{2}$$

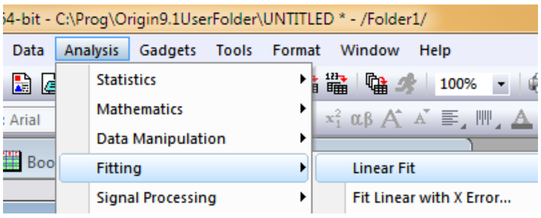
Berechnen Sie die Anteile separat und die Summe als Messunsicherheit $u_{\text{abs}}(g)$ für g. Welche Messabweichung $u(L)$ oder $u(\langle T \rangle)$ beziehungsweise $u(T_{50})$ hat jeweils den größeren Einfluss auf die Unsicherheit der bestimmten Schwerebeschleunigung g? Welche der beiden Methoden resultiert bei Ihnen zu einem genaueren g?

zu c) **Lineare Regression**
Das Quadrat der Periodendauer $T^2(L)$ ist eine lineare Funktion in der Pendellänge L mit dem Anstieg $b = 4\pi^2/g$:

$$T^2(L) = \frac{4\pi^2}{g} L \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = a + bx \quad \text{mit} \quad a \stackrel{!}{=} 0 \tag{3}$$

Welche Einheit haben a und b? Die lineare Regression mit $y = a + bx$ berechnet das optimale a und b zu den Wertepaaren $\{x_i = L_i\,; y_i = T_i^2\}$. Eine Anpassung an $y = bx$ ist physikalisch sinnvoll und ergibt ein genaueres g.
In einer Tabelle können Sie neue Spalten durch `Rechtsklick->Add Column` einfügen. Sie können Spaltenwerte aus bestehenden errechnen, indem Sie die Spalte markieren und `Formular->Apply` ausführen. In unserem Fall z. B. `(col(2)/1000)^2`, d.h. die Zeit von Millisekunden in Sekunden umrechnen und dieses Ergebnis quadrieren. Die erste Spalte ist die x-Spalte und beinhaltet die zugehörigen Längen L_i in Metern. Erstellen Sie ein `Scatter-Plot` von $T^2(L)$. Mit `Rechtsklick->Analyze->Fit Wizard->User defined->Fit Slope` wird der Regressionsparameter b berechnet und die Linie in der Abbildung eingetragen. Wenn Sie auf die Linie doppelt klicken, können sie mit `Edit` den x Bereich bei 0 beginnen lassen. Berechnen Sie aus den Regressionsparametern wiederum die Schwerebeschleunigung g und tragen Sie diese *sinnvoll gerundet* als Text in Ihre Regressionsabbildung ein.





6 Zusätzliche – freiwillige – Auswertungen

a) **Messunsicherheit bei Regression** Bei der Regression werden die Regressionsparameter und deren statistische Unsicherheit als $\pm \ldots$ angegeben. Aus Gl. (3) ergibt sich eine Unsicherheit von g zu $ug = 4\pi^2 b^{-2}$

b) Tragen Sie Ihre gemessenen Periodendauern $T(L)$ in 5 über der Pendellänge (nicht das Quadrat der Periodendauern) auf und führen Sie eine Anpassung an eine Wurzelfunktion $T(L) = a\sqrt{L}$ durch. Welche Einheit hat a? Berechnen Sie aus a die Schwerebeschleunigung. und tragen Sie diese in Ihre Abbildung ein.

c) Erstellen Sie aus Ihrem Histogramm in 5 eine Wahrscheinlichkeitsdichtedarstellung $p(T)$. Diese ist normiert, so dass das Integral über die Funktion, also die Fläche unter $p(T)$ den Wert 1 ergibt. Variieren Sie dazu in Ihrem Histogramm die `bin`-Breiten für eine aussagekräftige Darstellung. Durch `Rechtsklick => Go to Bin-Worksheet` erhalten Sie die Tabelle mit den Histogrammwerten. In einer zusätzlichen Spalte berechnen Sie $p(T)$ mit `col(Counts)/N*binwith` mit `N`, der Anzahl Ihrer Messpunkten und `binwith` für Ihre gewählte Binbreite. Stellen Sie $p(T)$ als Punktdiagramm dar. Ermitteln Sie die Parameter μ und σ durch Anpassung an eine Gaussverteilung (`Nonlinear Curve Fit`) an Ihre Wahrscheinlichkeitsdichtedarstellung $p(T)$. Vergleichen Sie diese Werte mit dem berechneten Mittelwert und der Standardabweichung aus der Aufgabenstellung 5. Was ist der Unterschied zwischen dem μ und dem Mittelwert beziehungsweise zwischen σ und der berechneten Standardabweichung aus dem Datensatz? Gibt es Verteilungen, wo sich die Werte deutlich voneinander unterscheiden?

7 Literatur

Wenn Sie sich im Internet der Universität befinden, können Bücher mit URL kostenlos heruntergeladen werden. Die Referenz [2] ist ein allgemeines Praktikumsbuch, welches bei vielen Versuchen hilfreich ist.

[1] Skript - Praktikum Physik - Universität Oldenburg. URL: `http://www.uni-oldenburg.de/fileadmin/user_upload/physik/ag/physikpraktika/download/GPR/pdf/Fehlerrechnung.pdf`.

[2] W. Schenk und F. Kremer (Hrsg.) *Physikalisches Praktikum*. Springer, 14. Auflage, 2014. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-00666-2`.

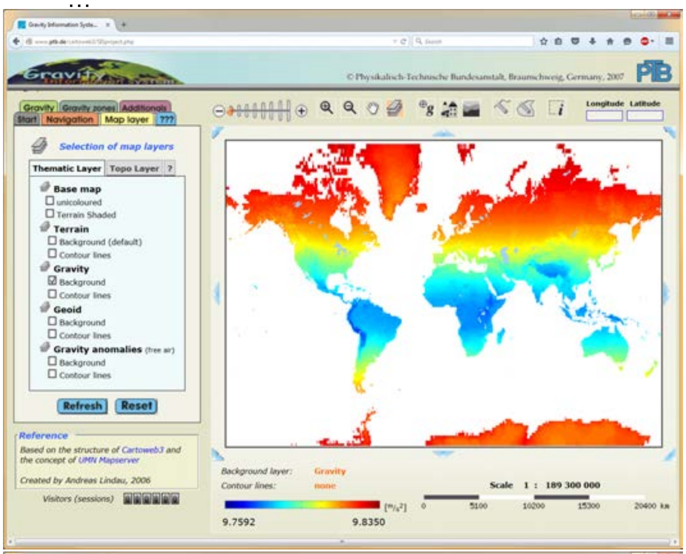
[3] M. Erdmann. *Experimentalphysik 5 - Moderne Methoden der Datenanalyse Physik Denken*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2013. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17294-6`.

[4] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer, 25. Auflage, 2015. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5`.

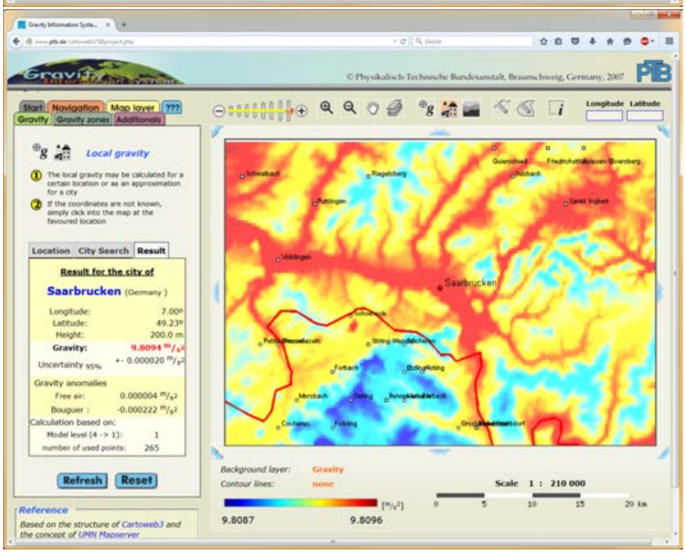
[5] P. A. Tipler. *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Springer Spektrum, 2015. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-54166-7`.

8 Zusatzmaterial

- Die Schwerebeschleunigung setzt sich aus dem lokalen Gravitationsfeld und der Zentrifugalbeschleunigung zusammen. Letztere hat ihr Maximum am Äquator und trägt dort bei der Erde zu -0.34% bei.
- Die Messung des lokalen Schwerefeldes der Erde wird Gravimetrie bezeichnet. Die Hauptkomponente in den lokalen Variationen der Fallbeschleunigung g sind Berge und Täler. Sie gibt aber auch Hinweise auf eventuell vorhandene Erz- oder Öllagerstätten im Untergrund. Beim Vorhandensein von Erzen oder Öl, ist die Fallbeschleunigung an der Oberfläche minimal größer bzw. kleiner als aus dem Obeflächen profiel zu erwarten wäre. Weitere Einflüsse sind
  - die Abplattung der Erde
  - die Abnahme mit zunehmender Höhe = Abstand zum Erdmittelpunkt
  - ...



Das Schwerefeld der Erde ist am Äquator kleiner als an den Polen.



Das lokale Schwerefeld um Saarbrücken zeigt die Abnahme von g mit der Höhe.

siehe bei der Physikalisch Technischen Bundesanstalt `http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php`