

Grundkurs Physik

OPTIK

Peter Ryder

Mai 2003

Vorwort

*Diese Einführung in die geometrische Optik und Wellenoptik entstand aus einem Vorlesungsskript, das für das zweite Semester des Anfängerkurses (Grundkurs Physik II) an der Universität Bremen konzipiert war und ursprünglich als Papierdokument an die Teilnehmer verteilt wurde. Dies ist schon die zweite, gründlich überarbeitete elektronische Version des Skripts. An dieser Stelle möchte ich mich bei den Studenten und Kollegen bedanken, die auf Fehler hingewiesen oder Verbesserungsvorschläge gemacht haben. Dieses Dokument ist für **beidseitiges** Drucken gedacht. Eine inhaltlich identische online-Version dieses Skripts, die sich besser zum Browsen eignet, ist über die Seite „<http://www.ifp.uni-bremen.de/ryder/lv/skripte.html>“ zu erreichen.*

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
1 Einführung	1
2 Reflexion und Brechung	5
2.1 Lichtstrahlen: das Fermatsche Prinzip	5
2.2 Genauere Formulierung des Fermatschen Prinzips	8
2.3 Beispiele für die Anwendung des Brechungsgesetzes	10
2.4 Antworten zu den Fragen	12
3 Abbildung durch Linsen und Spiegel	13
3.1 Abbildungen durch eine Grenzfläche	13
3.2 Vorzeichenregeln: reelle und virtuelle Abbildungen	15
3.3 Abbildung durch zwei Grenzen: dünne Linsen	16
3.4 Geometrische Bildkonstruktion	18
3.5 Linsenfehler	19
3.6 Linsenkombinationen und dicke Linsen	21
3.7 Abbildung durch Spiegel	22
3.8 Antworten zu den Fragen	24
4 Die optischen Instrumente	27
4.1 Das Auge	27
4.1.1 Aufbau und Funktion	27
4.1.2 Augenfehler	29
4.2 Die Lupe	29
4.3 Das Mikroskop	30
4.4 Das Fernrohr	31
4.5 Die Kamera	32
4.6 Antworten zu den Fragen	33
5 Licht als elektromagnetische Welle	35
5.1 Einleitung	35
5.2 Wellen in drei Dimensionen	35
5.3 Das Prinzip von Huygens	38
5.4 Die Mathematik der Interferenz	40
5.5 Absorption von Licht	42
5.6 Antworten zu den Fragen	43

6	Beugung und Interferenz	45
6.1	Voraussetzung für Interferenz – Kohärenz	45
6.2	Doppelspalt	46
6.3	Gitter – das Spektrometer	47
6.4	Spalt- und Lochblende	49
6.5	Auflösungsvermögen optischer Geräte	51
6.5.1	Auflösungsvermögen eines Fernrohrs	51
6.5.2	Auflösungsvermögen eines Mikroskops	51
6.6	Fresnel-Linsen	52
6.7	Vielstrahlinterferenzen	53
6.7.1	Seifenfilm	53
6.7.2	Newtonsche Ringe	56
6.7.3	Interferometer, Farbfilter	56
6.8	Holographie	57
6.9	Interferenz mit Intensitäten?	59
6.10	Antworten zu den Fragen	60
7	Polarisiertes Licht	63
7.1	Die Polarisationszustände des Lichtes	63
7.2	Verfahren zur Herstellung polarisierten Lichts	65
7.2.1	Selektive Absorption	65
7.2.2	Polarisation durch Doppelbrechung	65
7.2.3	Polarisierung durch Reflexion	66
7.2.4	Polarisation durch Streuung	67
7.2.5	Zirkular polarisiertes Licht: die $\lambda/4$ -Platte	68
7.3	Optische Aktivität	68
7.4	Antworten zu den Fragen	69
	Index	71
	Abbildungsverzeichnis	75

Kapitel 1

Einführung

Licht ist als ein der direkten Wahrnehmung zugängliches physikalisches Phänomen das wohl der Menschheit am längsten bekannte. Die Aufklärung seiner Natur jedoch erfolgte erst am Anfang dieses Jahrhunderts. Danach hat Licht einen dualen Charakter:

Welle In einer bestimmten Art von Experimenten verhält es sich, als ob es aus elektromagnetischen Wellen besteht. Es zeigt alle Eigenschaften transversaler Wellen, wie sie die Maxwell-Theorie vorhersagt.

Partikel Andere Experimente sind dagegen nicht erklärbar, wenn man dem Licht Wellencharakter zuschreibt. Beim photoelektrischen Effekt z.B. werden Elektronen durch Licht aus einem Metall herausgeschlagen. Hier verhält sich das Licht so, als ob es aus Teilchen (Partikeln) bestünde.

„**Wellikel**“ Der Doppelcharakter des Lichtes, als Welle oder als Teilchen zu erscheinen, wurde erst durch die Quantenmechanik verständlich. Scherzhaft könnte man die Lichtquanten oder Photonen auch als „Wellikel“ bezeichnen, um diesen Doppelcharakter anzudeuten.

Betrachten wir Licht als elektromagnetische Welle, so haben wir Wellenvorgänge, bei denen anstelle der örtlichen Schwingung von Teilchen (Atomen, Molekülen) ein elektrisches (E) und magnetisches (B) Feld senkrecht aufeinander und jeweils senkrecht zur Ausbreitungsrichtung k zeitlich und örtlich sinusförmig schwingen. Es gilt dann für eine in x -Richtung laufende Welle (s. Mechanik-Skript Kapitel 9)

$$E(x, t) = E_0 \sin(\omega t - kx). \quad (1.1)$$

Machen wir zu einem bestimmten Zeitpunkt t eine Momentaufnahme der Größe E (s. Abb. 1.1a), so erhalten wir die örtliche Variation der elektrischen Feldstärke. Die räumliche Periode $\lambda = 2\pi/k$ wird als die Wellenlänge des Lichts bezeichnet.

Wenn wir an einem festen Ort den zeitlichen Verlauf von E durch eine Filmaufnahme festhalten, bekommen wir Abb. 1.1b. Der Feldvektor schwingt mit der Frequenz ω . Die zeitliche Schwingungsperiode ist $T = 2\pi/\omega$. Eine Welle ist also durch die Wellenlänge λ und die Frequenz ω gekennzeichnet.

Die Geschwindigkeit des Lichtes im Vakuum wurde durch die neue Definition der SI-Einheit der Länge (s. Mechanik-Skript, Kapitel 1) international festgelegt und beträgt exakt

$$c = 299.792.458 \text{ m s}^{-1}$$

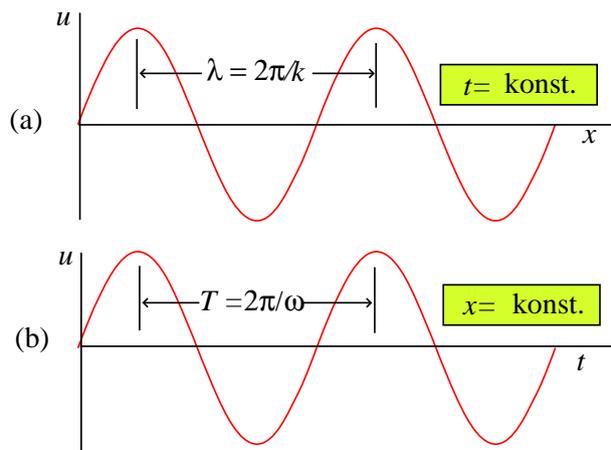


Abbildung 1.1: (a) Momentaufnahme, (b) Filmaufnahme einer laufenden Welle.

Betrachten wir Licht als Teilchen, so müssen wir Energie und Impuls des Teilchens kennen. Die Quantenmechanik liefert nun Beziehungen zwischen den Wellen- und Teilcheneigenschaften des **Photons**, wie das „Wellikel“ der elektromagnetischen Strahlung genannt wird, und zwar wird die Energie E durch

$$E = h\nu \quad (\nu = \omega/2\pi)$$

und der Impuls p durch

$$p = h/\lambda$$

gegeben, wo h die Plancksche Konstante ($6,626 \cdot 10^{-34}$ J s) bedeutet.

Die Wellenlängen elektromagnetischer Erscheinungen umfassen einen weiten Bereich, der in der Abb. 1.2 schematisch abgebildet ist. Das sichtbare Licht—Gegenstand der Optik—liegt im schmalen Wellenlängenbereich zwischen rd. 400 und 700 nm.

Man kann nun drei Bereiche der Optik unterscheiden:

Bereich der geometrischen Optik Die Wellenlänge ist sehr klein gegen die Dimension D der verwendeten Nachweisgeräte und die Photonenenergie $E = h\nu$ ist sehr klein gegen die Nachweisempfindlichkeit N dieser Geräte:

$$\lambda \ll D, \quad E \ll N.$$

Letzteres heißt, dass man zu einer Messung sehr viele Photonen braucht.

Bereich der Wellenoptik

$$\lambda \approx D, \quad E \ll N.$$

Hier treten die typischen Wellenerscheinungen auf.

Bereich der Quantenmechanik

$$\lambda \ll D, \quad E \gg N.$$

In diesem Bereich treten Quanteneffekte auf, die im Rahmen der klassischen Physik nicht erklärt werden können.

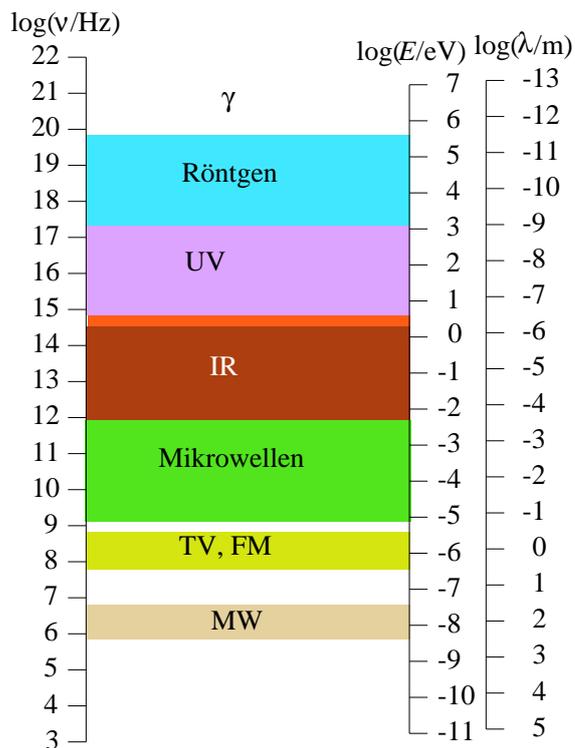


Abbildung 1.2: Frequenz, Energie und Wellenlänge der elektromagnetischen Strahlung von der γ -Strahlung bis Radiowellen. Die Energien sind in Elektronenvolt (eV) angegeben. 1 eV ist die Energie, die einem Elektron durch eine Spannung von 1 V verliehen wird. ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.)

Dieser Kurs behandelt die beiden Bereiche 1 und 2. Wir beginnen mit dem Bereich der geometrischen Optik. Dieser Bereich ist auch historisch zuerst entwickelt worden. Es ist hierbei interessant, wie aus einem physikalisch nicht gerade einsichtigen Prinzip, das zur damaligen Zeit (17. Jahrhundert) eher philosophisch verankert war, eine richtige Beschreibung aller Experimente der geometrischen Optik folgt. Im zweiten Teil werden wir uns der Wellennatur des Lichtes zuwenden. Es stellt sich dabei heraus, dass diese physikalisch begründete Theorie die geometrische Optik mitbeschreiben kann.

Kapitel 2

Reflexion und Brechung

2.1 Lichtstrahlen: das Fermatsche Prinzip

In der geometrischen Optik betrachten wir den Verlauf von Lichtstrahlen. Ein solcher Strahl kann hergestellt werden, indem man aus dem Licht einer sehr weit entfernten Lichtquelle (Sonne) durch eine kleine Öffnung (Ritze im Dach des dunklen Dachbodens) einen Teil ausblendet. Im Zigarettenrauch wird dann ein Strahlenbündel sichtbar. Wir können uns jedes Lichtfeld aus solchen Lichtbündeln zusammengesetzt denken. Wir wissen nun als experimentellen Befund drei wesentliche Eigenschaften solcher Lichtstrahlen (s. Abb. 2.1):

1. Lichtstrahlen verlaufen im homogenen Medium (Luft, Wasser etc.) geradlinig.
2. Lichtstrahlen werden an glatten Grenzflächen reflektiert und der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallswinkel (Reflexionsgesetz).
3. Beim Eintreten in ein anderes Medium wird der Lichtstrahl gebrochen, und es gilt das Brechungsgesetz von Snellius (Willebrord Snellius oder Snel van Roijen, 1580–1626.):

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta. \quad (2.1)$$

(n_1 und n_2 sind Stoffeigenschaften der beiden Medien, die sog. **Brechungsindizes**).

Gibt es ein gemeinsames Prinzip für dieses Verhalten von Lichtstrahlen? Auf diese Frage gab Pierre de Fermat (1601–1665) eine Antwort, die wir zunächst wie folgt formulieren (wie wir später sehen werden, stimmt diese Formulierung nur mit Einschränkungen):

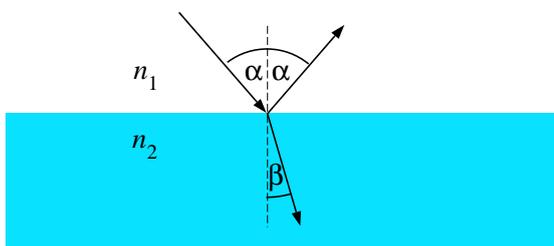


Abbildung 2.1: Reflexion und Brechung an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes n_1 bzw. n_2 .

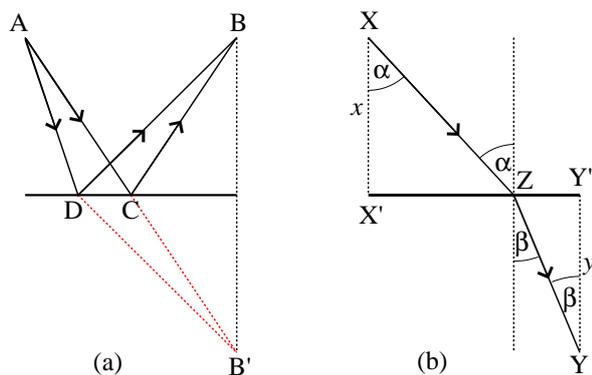


Abbildung 2.2: Ableitung des Reflexionsgesetzes (a) und des Brechungsgesetzes (b) aus dem Fermatschen Prinzip.

Prinzip von Fermat (vorläufige Version): Ein Lichtstrahl, der von A nach B läuft, nimmt von allen geometrisch möglichen Wegen den, der die geringste Zeit benötigt.

Wir können aus diesem Grundprinzip die oben genannten experimentellen Befunde ableiten.

Geradliniger Verlauf von Lichtstrahlen: Da die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist und der Strahl in einem homogenen Medium mit konstanter Geschwindigkeit läuft, ist auch die Zeit minimal.

Reflexionsgesetz: Abb. 2.2a zeigt mögliche Wege von A nach B über ein Reflexion in eine Grenzfläche. Für einen beliebigen Punkt D in der Grenzfläche ist der Weg ADB gleich lang wie der Weg ADB', wo B' der Spiegelpunkt von B ist. Der kürzeste Weg von A nach B' ist offenbar die Gerade ACB, die dem symmetrischen Weg ACB entspricht, d.h. es gilt Einfallswinkel = Reflexionswinkel.

Brechungsgesetz: Die Brechung ist das Ergebnis der Tatsache, dass die Lichtgeschwindigkeit vom Medium abhängt. In der Abb. 2.2b seien die Geschwindigkeiten c_1 bzw. c_2 . Die Zeit für den Weg XZY ist

$$t = \frac{XZ}{c_1} + \frac{ZY}{c_2} = \frac{x}{c_1 \cos \alpha} + \frac{y}{c_2 \cos \beta}. \quad (2.2)$$

Verschieben wir den Punkt Z, so ändern sich α und β , wobei die Bedingung

$$X'Y' = x \tan \alpha + y \tan \beta = \text{konst.} \quad (2.3)$$

erfüllt wird. Um den Minimalwert von t nach (2.2) mit der Nebenbedingung (2.3) zu bestimmen, verwenden wir die Methode der Lagrange-Multiplikatoren, d.h. wir bilden die Funktion

$$F = \frac{x}{c_1 \cos \alpha} + \frac{y}{c_2 \cos \beta} + \lambda(x \tan \alpha + y \tan \beta)$$

und setzen die Ableitungen nach α und β gleich Null:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0.$$

Wir erhalten dann

$$\sin \alpha = \lambda c_1 \quad \text{und} \quad \sin \beta = \lambda c_2$$

d.h.

$$\frac{\sin \alpha}{c_1} = \frac{\sin \beta}{c_2} \quad (2.4)$$

Vergleichen wir (2.4) und (2.1), sehen wir, dass Sie identisch sind, wenn der Brechungsindex als das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum zur Lichtgeschwindigkeit im Medium definiert wird, d.h.

$$n_i = c/c_i.$$

Tabelle 2.1 gibt die Werte der Brechungsindizes einiger Substanzen.

Hier ist ein interaktives Experiment, mit dem Sie die Wirkung des Fermatschen Prinzips bei der Lichtbrechung ausprobieren können:

<http://didaktik.physik.uni-wuerzburg.de/~pkrahmer/ntnujava/refraction/refraction.html>

Tabelle 2.1: Brechungsindizes einiger Stoffe für Licht der Wellenlänge 589 nm bei 20°C.

Stoff	n
Luft (1013 hPa)	1,000272
Wasser	1,333
Benzol	1,501
Diamant	2,417
Steinsalz	1,544
Kronglas	1,510
Flintglas	1,613

Frage 2.1 Welchen Einfluss hat der Brechungsindex auf die Frequenz und die Wellenlänge einer Lichtwelle?

Aus dem Fermatschen Prinzip folgt auch die *Umkehrbarkeit* von Lichtstrahlen: Folgt ein Strahl von A nach B dem Weg ACB, so folgt zwangsläufig aus dem Fermatschen Prinzip, dass ein Strahl von B nach A über den gleichen Weg in der umgekehrten Richtung (BCA) läuft. Voraussetzung hierfür ist allerdings, dass die Geschwindigkeit nicht von der Laufrichtung abhängt. In Kristallen ist die Geschwindigkeit eines Lichtstrahls im allgemeinen abhängig von der Bewegungsrichtung \mathbf{k} , aber die Geschwindigkeiten für $+\mathbf{k}$ und $-\mathbf{k}$ sind immer gleich.

Wenn ein Lichtstrahl auf die Grenze zwischen zwei Medien trifft, findet im allgemeinen sowohl Reflexion als auch Brechung statt, d.h. die Energie des einfallenden Strahls teilt sich zwischen dem reflektierten und dem gebrochenen Strahl auf. Eine besondere Situation ergibt sich, wenn das Licht vom optisch dichteren Medium (mit dem größeren Brechungsindex m) her auf die Grenze trifft (s. Abb. 2.3a), z.B. von der Glasseite auf eine Glas/Luft-Grenzfläche. Der Austrittswinkel in das dünnere Medium ist größer als der Einfallswinkel, kann allerdings

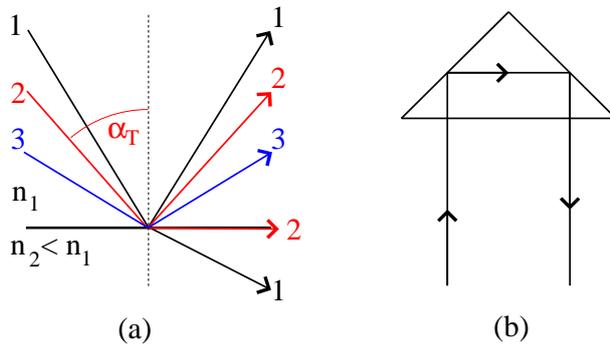


Abbildung 2.3: (a) Zur Erklärung der Totalreflexion. 1: Reflexion und Brechung, 2: kritischer Einfallswinkel, 3: Totalreflexion. (b) Ausnutzung der Totalreflexion für die Umkehrung eines Lichtstrahls mit einem rechtwinkligen Glasprisma.

nicht größer als 90° werden. Der kritische Winkel α_T , bei dem der Austrittswinkel gerade 90° erreicht (Abb. 2.3a, Strahl 2) ist gegeben durch

$$n_1 \sin \alpha_T = n_2 \sin(\pi/2) = n_2,$$

d.h.

$$\sin \alpha_T = n_2/n_1. \quad (2.5)$$

Für größere Winkel (Strahl 3) tritt Totalreflexion auf, d.h. der Strahl wird zu 100% wie an einem idealen Spiegel reflektiert. In optischen Instrumenten (Prismenfernrohr) wird dieses Phänomen zur Umkehrung einer Lichtstrahls mit einem rechtwinkligen Prisma ausgenutzt (s. Abb. 2.3b).

Frage 2.2 Wie groß muss der Brechungsindex des Prismenmaterials in Abb. 2.3b mindestens sein?

Eine andere Anwendung der Totalreflexion ist der **Lichtleiter**. In einer Glasfaser kann Licht weitergeleitet werden, weil an den Innenwänden Totalreflexion auftritt. Das Licht geht also „um die Ecke“. Dieses Prinzip wird in Bündeln aus sehr dünnen Glasfasern verwendet, um Bilder aus schwer zugänglichen Stellen zu übertragen (Medizin).

Frage 2.3 An heißen Tagen beobachtet man Lichtspiegelungen in horizontalen Flächen, z.B. im Straßenbelag, die das Vorhandensein von Wasserflächen vortäuschen (Fata Morgana). Wie kommt dieser Effekt zustande, und warum verschwinden die „Wasserpfützen“, wenn man näher kommt?

2.2 Genauere Formulierung des Fermatschen Prinzips

Es wurde oben angemerkt, dass die gegebene Formulierung des Fermatschen Prinzips nicht ganz korrekt ist. Um dies zu zeigen, und um eine exakte Formulierung zu finden, betrachten wir zunächst einen Spezialfall der Reflexion.

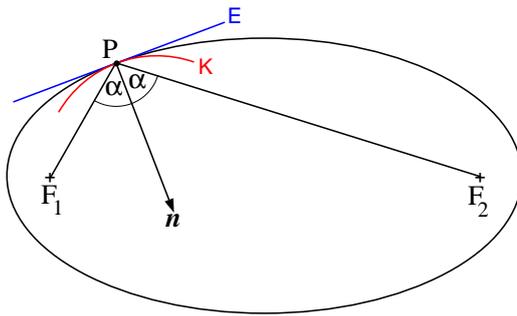


Abbildung 2.4: Zur Verallgemeinerung des Fermatschen Prinzips: Reflexion in einem Ellipsoid-Spiegel. F_1 und F_2 sind die Brennpunkte der Ellipse. Der Weg F_1PF_2 ist für alle Punkte P auf der Fläche gleich. Der Vektor n ist die Flächennormale am Punkt P . Für die Tangentialebene E sowie für die Kugelfläche K gelten ebenfalls die Reflexionsbedingungen am Punkt P .

Abb. 2.4 zeigt einen Schnitt durch einen Spiegel, der die Form eines Rotationsellipsoids hat. Die Punkte F_1 und F_2 sind die beiden **Brennpunkte**, die folgende Eigenschaft aufweisen: Für jeden Punkt P , der auf der Ellipsoidfläche liegt, gilt

$$F_1P + F_2P = 2a.$$

($2a$ ist die Länge der großen Hauptachse der Ellipse.) Der optische Weg—und daher die Laufzeit eines Lichtstrahls—von F_1 über P nach F_2 ist für alle möglichen Positionen von P auf der Oberfläche gleich. Mit dem Fermatschen Prinzip folgt daraus, dass jeder Lichtstrahl, der vom Punkt F_1 ausgeht, nach der Reflexion zum Punkt F_2 gelangt. Wir sagen, dass F_2 die **Abbildung** von F_1 ist (und umgekehrt).

Für jeden Punkt auf der Oberfläche gilt auch das Reflexionsgesetz bezüglich der Winkel zwischen den Lichtstrahlen und der Flächennormalen n . Ersetzen wir die Ellipsoidfläche durch die Tangentialebene E oder durch die stärker gekrümmte Kugelfläche K , so gelten auch für diese Flächen die Reflexionsbedingungen (Einfallswinkel = Reflexionswinkel) am Punkt P , im Gegensatz zur Ellipsoidfläche jedoch nicht für benachbarte Punkte. Für die Ebene gelten für benachbarte Punkte längere Zeiten; der „richtige“ Weg entspricht der minimalen Zeit, so wie unsere bisherige Formulierung des Fermatschen Prinzips es verlangt. Für eine Kugeloberfläche, die wie K in Abb. 2.4 stärker als die Ellipsoidfläche gekrümmt ist, liegen alle Punkte außer P *innerhalb* der Ellipsoidfläche. Für die benachbarten Punkte gelten daher *kürzere* Laufzeiten, und der „richtige“ Weg entspricht nicht dem Minimum sondern dem *Maximum*.

Wir können das Prinzip von Fermat nun allgemeiner formulieren:

Die Ausbreitung von Lichtstrahlen erfolgt so, dass die Laufzeit des Strahls gegenüber benachbarten (nicht den Gesetzen der Optik gehorchenden) Wegen ein **Extremum** hat.

Das bedeutet, dass in erster Ordnung für infinitesimal benachbarte Wege der Zeitunterschied $\delta t = 0$ ist.

Das Fermatsche Prinzip bietet zwar eine Rechenvorschrift, mit der wir den Weg eines Lichtstrahls bestimmen können, es ist aber kein Kausalgesetz, wie z.B. die Newtonschen Gesetze der Mechanik. Die physikalische Begründung des Prinzips (Fermat war ja Mathematiker!) basiert auf die Behandlung von elektromagnetischen Wellen im Rahmen der Elektrodynamik.

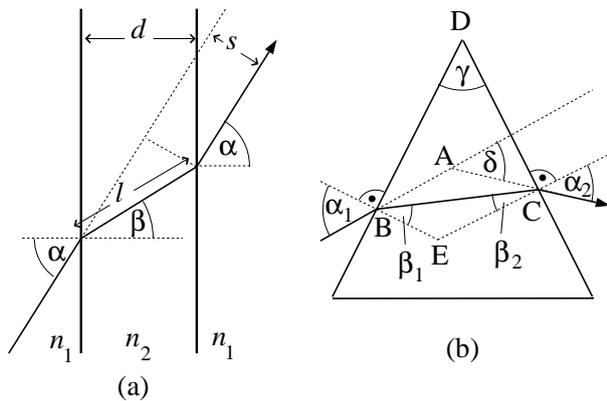


Abbildung 2.5: Durchgang eines Lichtstrahls (a) durch eine planparallele Glasplatte der Dicke d , (b) durch ein Glasprisma mit dem Öffnungswinkel γ .

2.3 Beispiele für die Anwendung des Brechungsgesetzes

Wir schließen dieses Kapitel mit einigen einfachen Beispielen für die Anwendung des Brechungsgesetzes.

Abb. 2.5a zeigt den Durchgang eines Lichtstrahls durch eine planparallele Glasplatte der Dicke d . Bedingt durch die Parallelität der beiden Flächen hat der Strahl nach dem Austritt die gleiche Richtung wie beim Eintritt, wird aber seitlich versetzt. Wir berechnen die Versetzung s in Abhängigkeit von dem Einfallswinkel α und der Plattendicke d .

Aus Abb. 2.5a folgt

$$s = l \sin(\alpha - \beta), \quad d = l \cos \beta.$$

Wenn wir l eliminieren, erhalten wir

$$s = d \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta \sin \alpha} \right)$$

und mit Hilfe des Brechungsgesetzes (2.1) schließlich

$$s = d \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \alpha}} \right).$$

Abb. 2.5b zeigt den Durchgang eines Lichtstrahls durch ein Prisma mit dem Öffnungswinkel γ . Der Ablenkungswinkel δ ist ein Außenwinkel des Dreiecks ABC. Damit gilt:

$$\delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2).$$

Ferner folgt wegen der rechten Winkel DBE bzw. DCE

$$\gamma = \beta_1 + \beta_2$$

und somit

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma.$$

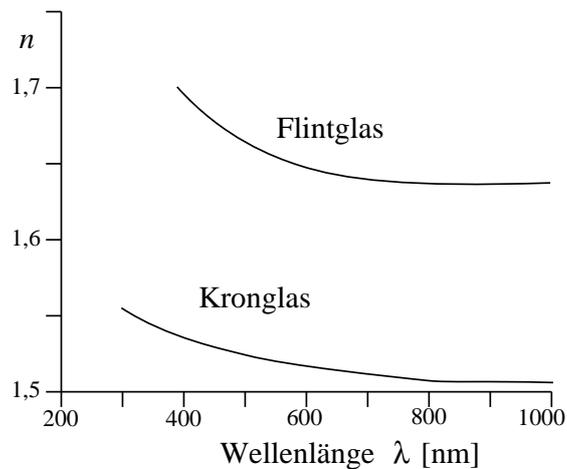


Abbildung 2.6: Variation der Brechzahl n mit der Wellenlänge (Dispersion) für Flintglas und Kronglas.

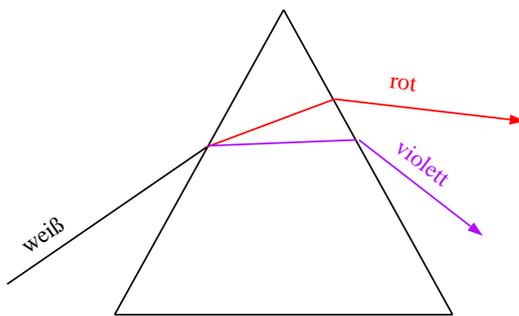


Abbildung 2.7: Zerlegung von weißem Licht durch ein Prisma.

Nun ist $\sin \alpha_1 = n \sin \beta_1$ (Brechungsgesetz), d.h. $\alpha_1 = \arcsin(n \sin \beta_1)$, und entsprechend an der zweiten Fläche $\alpha_2 = \arcsin(n \sin \beta_2)$, und damit

$$\delta = \arcsin(n \sin \beta_1) + \arcsin(n \sin \beta_2) - \gamma.$$

Wenn wir β_2 durch $\gamma - \beta_1$ ersetzen und nach β_1 differenzieren, erhalten wir als Bedingung für die minimale Ablenkung:

$$\frac{d\delta}{d\beta_1} = \frac{n \cos \beta_1}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \beta_1}} - \frac{n \cos(\gamma - \beta_1)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\gamma - \beta_1)}} = 0.$$

Diese Bedingung ist erfüllt für $\beta_1 = \gamma - \beta_1 = \beta_2$, d.h. für den *symmetrischen* Durchgang. Der Ablenkungswinkel ist dann

$$\delta = 2 \arcsin(n \sin(\gamma/2)) - \gamma.$$

Frage 2.4 Wie groß darf γ beim symmetrischen Durchgang maximal sein?

Die Brechungsindizes von Stoffen sind im allgemeinen von der Lichtwellenlänge abhängig. Abb. 2.6 zeigt den Verlauf für zwei Glassorten. Die Veränderung von n mit λ heißt **Dispersion**. Sie führt dazu, dass verschiedene Wellenlängen von einem Prisma unterschiedlich stark abgelenkt werden (Abb. 2.7). Weißes Licht, das aus einer Mischung verschiedener Wellenlängen besteht, kann auf diese Weise in seine Bestandteile zerlegt werden. Die Energieverteilung als Funktion der Wellenlänge wird als **Spektrum** bezeichnet, und das Gerät, das ein Spektrum erzeugt, z.B. mit Hilfe eines Prismas, heißt **Spektrometer**.

2.4 Antworten zu den Fragen

Frage 2.1 Die Frequenz ist durch die Schwingungsfrequenz der Ladungen gegeben und ändert sich nicht, wenn die Welle die Grenze zwischen zwei Medien passiert. Die Wellenlänge ist also proportional zur Geschwindigkeit und damit umgekehrt proportional zum Brechungsindex.

Frage 2.2 Es muss bei einem Einfallswinkel von 45° Totalreflexion stattfinden. Die Bedingung hierfür ist

$$\sin(\pi/4) \geq 1/n \text{ d.h. } n \geq \sqrt{2}.$$

Frage 2.3 Die unterste Luftschicht wird durch den Boden erwärmt und hat infolgedessen eine geringere Dichte und einen kleineren Brechungsindex als die darüber liegende Luft. Von oben kommende Lichtstrahlen werden deshalb vom Lot weg gebrochen, und bei genügend großem Einfallswinkel findet Totalreflexion statt. Nach dem Reflexionsgesetz ist der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel, und der Effekt ist nur bei sehr flachen Betrachtungsrichtungen zu sehen.

Frage 2.4 Beim symmetrischen Durchgang ist

$$\beta_1 = \beta_2 = \gamma/2.$$

Der Einfallswinkel ist damit durch

$$\sin \alpha = n \sin(\gamma/2)$$

gegeben. Da α nicht größer als $\pi/2$ sein kann, folgt für γ

$$\gamma \leq 2 \arcsin(1/n).$$

Kapitel 3

Abbildung durch Linsen und Spiegel

Dieses Kapitel behandelt die Anwendung des Fermatschen Prinzips bzw. der Brechungs- und Reflexionsgesetze zur Bestimmung der Abbildungseigenschaften von Linsen und Spiegeln. Wir betrachten zunächst die Abbildung eines Objekts durch eine Grenzfläche zwischen zwei Medien. Danach werden wir in der Lage sein, Linsen zu behandeln, die zwei Grenzflächen besitzen. Im zweiten Teil betrachten wir die Abbildung durch reflektierende Oberflächen, d.h. durch Spiegel. Linsen und Spiegel sind die wesentlichen Bestandteile von optischen Instrumenten, die im nächsten Kapitel behandelt werden.

3.1 Abbildungen durch eine Grenzfläche

Wir teilen den Raum in zwei Hälften auf (Abb. 3.1). Die eine Hälfte sei durch Luft mit dem Brechungsindex 1 gefüllt, die andere etwa durch Glas mit dem Brechungsindex n . Wir betrachten nun einen Punkt A im Objektraum. Um eine Abbildung zu erhalten, müssen wir die Trennfläche F so konstruieren, dass jeder aus A kommende Lichtstrahl, der diese Grenzfläche durchtritt, durch einen Punkt B im Bildraum läuft. Damit wird jedem Objektpunkt eindeutig ein Bildpunkt zugeordnet. Wir erhalten also eine Abbildung des Objektes im Bildraum. Nach dem Prinzip von Fermat muss die Fläche so gestaltet werden, dass alle Wege von A nach B gleiche Zeit brauchen. Nützlich ist auch in diesem Zusammenhang der Begriff des **optischen Weges**:

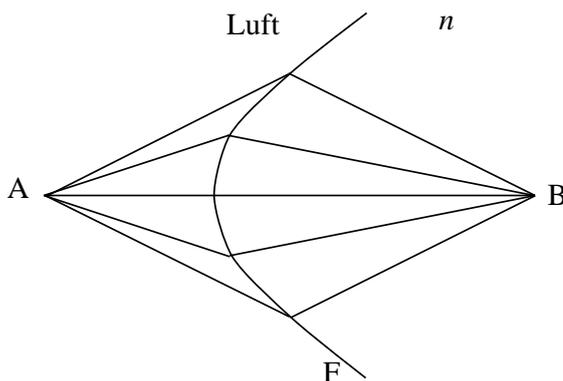


Abbildung 3.1: Abbildung eines Punktes A (= Objekt) im Punkt B (= Bild) durch eine Grenzfläche F zwischen Luft (links) und einem Medium mit dem Brechungsindex n . Alle Lichtstrahlen, die den Punkt A verlassen und auf die Grenze treffen werden so gebrochen, dass sie zum Punkt B gelangen.

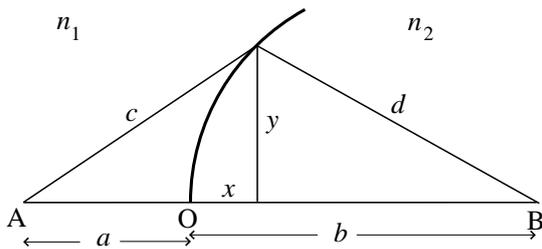


Abbildung 3.2: Abbildung durch eine Fläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes n_1, n_2 . Die Fläche ist eine Rotationsfläche der Kurve $y(x)$.

Der optische Weg eines Lichtstrahls ist die Strecke, die der Strahl im Vakuum zurückgelegt hätte. Die Strecke s in einem Medium mit dem Brechungsindex n entspricht also dem optischen Weg ns .

Die Fläche F muss daher so gestaltet sein, dass die optischen Wege aller Strahlen von A nach B gleich sind. Um die Fläche zu berechnen, betrachten wir in Abb. 3.2 den allgemeinen Fall einer Fläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1, n_2 . Die Fläche soll rotationssymmetrisch sein und wird durch Rotation der Kurve $y(x)$ um die x -Achse gebildet. Die Symmetrieachse wird als **optische Achse** bezeichnet. Wir nehmen den Mittelpunkt O als Ursprung des Koordinatensystems. Wenn alle optischen Wege gleich sind, gilt für jeden Punkt (x, y) auf der Kurve:

$$n_1 a + n_2 b = n_1 c + n_2 d = n_1 \sqrt{(a+x)^2 + y^2} + n_2 \sqrt{(b-x)^2 + y^2}. \quad (3.1)$$

Diese Gleichung ist eine relativ komplizierte Beziehung zwischen y und x , die die Form der Kurve beschreibt. Es soll jetzt gezeigt werden, dass die Abbildung auch mit einer Kugelfläche gelingt, wenn bestimmte Bedingungen eingehalten werden, die unten näher erläutert werden. Die Gleichung für den Schnitt einer Kugelfläche mit dem Radius R lautet in der x - y -Ebene

$$x^2 + y^2 = 2Rx,$$

wenn der Mittelpunkt die Koordinaten $(R, 0, 0)$ hat. Wenn wir $x^2 + y^2$ in (3.1) durch $2Rx$ ersetzen, erhalten wir nach Umformen

$$n_1 a + n_2 b = n_1 a \left(1 + \frac{2x}{a} + \frac{2Rx}{a^2} \right)^{1/2} + n_2 b \left(1 - \frac{2x}{b} + \frac{2Rx}{b^2} \right)^{1/2}. \quad (3.2)$$

Wir machen nun folgende *Näherung*: $x \ll a, b$, d.h. wir berücksichtigen nur **achsennahe** Strahlen. (Diese Bedingung lässt sich z.B. mit einer Blende realisieren). Wir können dann die rechte Seite von (3.2) als Potenzreihen entwickeln und nur die linearen Terme in x/a und x/b mitnehmen. Das Ergebnis ist

$$R = \frac{n_2 - n_1}{\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b}}. \quad (3.3)$$

Eine Kugelfläche mit diesem Radius erfüllt also die Abbildungskriterien im Rahmen der gemachten Näherungen. Für einen gegebenen Wert des Radius R kann die **Objektweite** a beliebig gewählt werden. Die **Bildweite** b ist aber dann eindeutig bestimmt. Um die Beziehung zwischen a und b deutlich zu machen, wird (3.3) üblicherweise in folgender Form geschrieben:

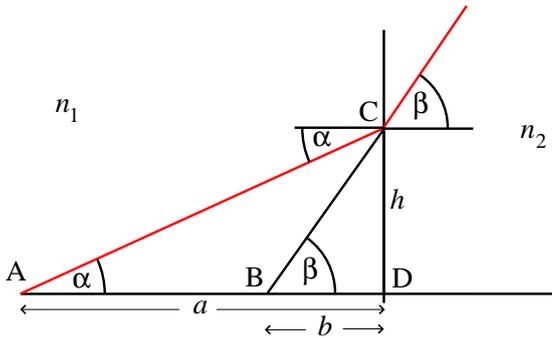


Abbildung 3.3: Abbildung durch eine ebene Grenzfläche.

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (3.4)$$

Die Beziehung gilt für alle Punkte im Objektraum, vorausgesetzt, dass wir nur Strahlen zulassen, die nahe dem geraden Weg von A nach B sind.

3.2 Vorzeichenregeln: reelle und virtuelle Abbildungen

Im letzten Abschnitt haben wir die Größen a , b und R alle als positiv betrachtet, wie sie in Abb 3.2 definiert sind. Im Bild wurde eine (von der Lichtseite betrachtet) konvexe Fläche gewählt. Für eine konkave Fläche müsste ein negativer Wert für R eingesetzt werden. Was bedeuten negative Werte für a oder b ?

Dazu betrachten wir einen einfachen Spezialfall, die Abbildung durch eine *ebene* Grenzfläche ($R = \infty$). Gleichung (3.4) ergibt: $b = -n_2 a / n_1$. Das Bild muss also *vor* der Grenze sein. Wie ist das möglich? Abb. 3.3 zeigt die Erklärung. Das Bild zeigt zwei Strahlen, die das Objekt O verlassen und auf die Grenzfläche treffen. Der eine Strahl fällt senkrecht auf die Grenze und wird nicht abgelenkt. Der andere fällt mit dem Einfallswinkel α auf die Grenzfläche und wird gebrochen (Winkel β). Für einen Beobachter, der hinter der Grenzfläche steht und in Richtung des Objekts schaut, scheinen die Strahlen vom Punkt B, nicht von A zu divergieren. Er sieht also nicht das Objekt, sondern eine Abbildung an der Stelle B. Eine Abbildung, die, wie in Abb. 3.2, durch konvergierende Strahlen zustandekommt, nennt man eine **reelle** Abbildung. Eine Abbildung, die nur als scheinbarer Ursprung divergierender Strahlen erscheint, heißt **virtuelle** Abbildung. Ein reelles Bild kann man auf einer Leinwand sichtbar machen, ein virtuelles Bild nicht.

Die Beziehung zwischen a und b für die ebene Grenzfläche kann man aus Abb. 3.3 mit Hilfe des Brechungsgesetzes ableiten: Aus den Dreiecken ACD und BCD folgt

$$\tan \alpha = h/|a|, \quad \tan \beta = h/|b|$$

und, wenn man h eliminiert

$$|b| = |a| \tan \alpha / \tan \beta.$$

Für kleine Winkel ist

$$\tan \alpha / \tan \beta \approx \sin \alpha / \sin \beta$$

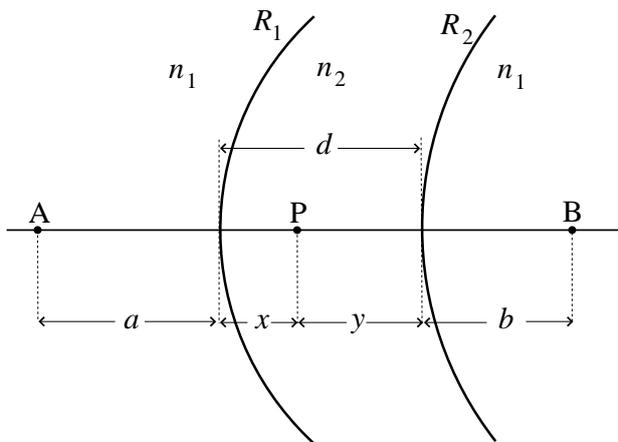


Abbildung 3.4: Abbildung durch zwei Kugelflächen hintereinander.

und aus dem Brechungsgesetz folgt

$$\sin \alpha / \sin \beta = n_2 / n_1$$

und damit

$$|b| = |a| n_2 / n_1.$$

Dies entspricht dem aus (3.4) gewonnenen Ergebnis, wenn wir die Vereinbarung treffen, dass b für virtuelle Abbildung als negativ betrachtet wird.

Gibt es sowas wie ein „virtuelles Objekt“? Wenn wir in Abb. 3.2 eine zweite Grenze zwischen der ersten und dem Bild einfügen, kommt das Bild nicht zustande, dient aber trotzdem als virtuelles Objekt für die zweite Fläche, und die Objektweite ist negativ.

Die Vorzeichenregeln, die wir im folgend benutzen werden, lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. R ist positiv für konvexe und negativ für konkave Flächen.
2. a ist positiv für reelle und negativ für virtuelle Objekte.
3. b ist positiv für reelle und negativ für virtuelle Abbildungen.

Diagramme werden meistens so gezeichnet, dass das Licht von links einfällt.

3.3 Abbildung durch zwei Grenzen: dünne Linsen

Eine Linse besteht aus einem durch zwei Kugelflächen (Radien R_1 bzw. R_2) begrenzten Medium (üblicherweise Glas, Brechungsindex n_2), das sich in einem anderen Medium (z.B. Luft, Brechungsindex n_1) befindet. Die verlängerte Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Kugelflächen wird als **optische Achse** bezeichnet. Vorerst betrachten wir nur die Abbildung von Punkten, die auf der optischen Achse liegen, und nur achsennahe Strahlen. Die Abbildungseigenschaften der Linse lassen sich dann durch zweimalig Anwendung der Gleichung (3.4) bestimmen (s. Abb. 3.4):

Die erste Fläche (Radius R_1) bildet das Objekt A bei P ab. Das Zwischenbild P wird dann durch die zweite Fläche bei B abgebildet. Aus (3.4) folgt

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{x} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad (3.5)$$

$$\frac{n_2}{y} + \frac{n_1}{b} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}. \quad (3.6)$$

Ferner gilt für den Abstand d der beiden Flächen (gemessen an der optischen Achse)

$$x + y = d. \quad (3.7)$$

Wenn wir x und y aus (3.5), (3.6) und (3.7) eliminieren, bekommen wir eine Beziehung zwischen der Objektweite a und der Bildweite b für die Linse:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{d}{n_1 n_2} \left(\frac{n_2 - n_1}{R_1} - \frac{n_1}{a} \right) \left(\frac{n_1 - n_2}{R_2} - \frac{n_1}{b} \right). \quad (3.8)$$

Ist d klein genug ($d \ll R_1, R_2$), können wir den zweiten Term auf der rechten Seite von (3.8) vernachlässigen, und wir erhalten dann die Linsengleichung für *dünne* Linsen:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad (3.9)$$

mit

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.10)$$

Die Größe f heißt **Brennweite** der Linse; sie hat folgende Bedeutung: Geht a gegen ∞ , folgt aus (3.9), dass b gegen f geht. Die Brennweite ist also die Bildweite eines unendlich weit entfernten Objektes. Anders ausgedrückt: Alle Strahlen, die parallel zur optischen Achse verlaufen, vereinigen sich in einem Punkt F, der auf der optischen Achse in der Entfernung f von der Linse liegt. F nennt man den **Brennpunkt** der Linse. Setzt man die Objektweite gleich f , zeigt Gleichung (3.9), dass die Bildweite unendlich wird. Diese Position des Objektes (F') nennt man den vorderen Brennpunkt. Jede dünne Linse hat 2 Brennpunkte, die gleich weit entfernt von der Linse sind.

Frage 3.1 Zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung (3.10), dass eine Linse die gleich Brennweite hat, ob das Licht von links oder rechts einfällt.

Gleichung (3.10) zeigt, dass die Brennweite sowohl positiv als auch negativ sein kann. Ein positiver Wert bedeutet, dass der Brennpunkt F hinter der Linse ist: F ist die reelle Abbildung eines unendlich weit entfernten Objektes. Eine solche Linse wird als **Sammellinse** bezeichnet. Ein negativer Wert von f bedeutet, dass der Brennpunkt vor der Linse ist. In diesem Fall ist F die *virtuelle* Abbildung eines unendlich weit entfernten Objekts. Nach der Linse divergieren die Strahlen vom Punkt F. Eine Linse mit $f < 0$ wird als **Zerstreuungslinse** bezeichnet. Die Eigenschaften der Brennpunkte von Sammel- und Zerstreuungslinsen sind in Abb. 3.5 zusammengefasst.

Frage 3.2 Ob eine Glaslinse in Luft eine Zerstreuungs- oder Sammellinse ist, hängt von dem Vorzeichen von $(1/R_1 - 1/R_2)$ ab. Skizzieren Sie ein paar Beispiele für konvex-konvex, konkav-konkav und konkav-konvex Linsen und entscheiden Sie jeweils, ob sie Sammel- oder Zerstreuungslinsen sind. Gibt es eine einfache Entscheidungsmöglichkeit aufgrund der radialen Dickenänderung der Linse? (Denken Sie an die Ablenkung durch ein Prisma.)

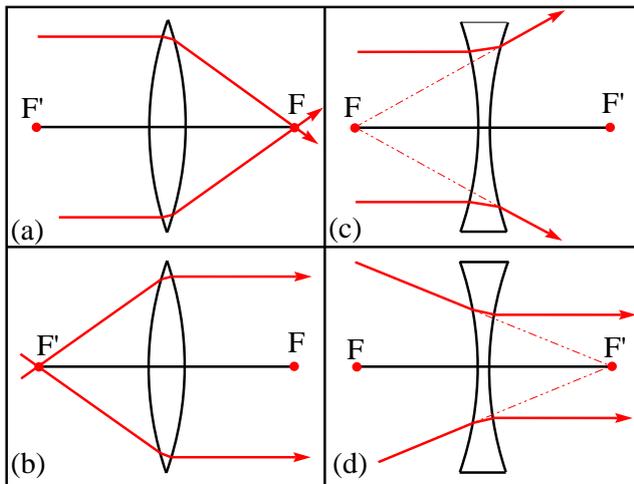


Abbildung 3.5: (a) Sammellinse: Parallelstrahlen konvergieren zu F .

(b) Sammellinse: Strahlen, die von F' divergieren, werden parallel gebrochen.

(c) Zerstreuungslinse: Parallelstrahlen divergieren von F .

(d) Zerstreuungslinse: Strahlen, die gegen F' konvergieren, werden parallel gebrochen.

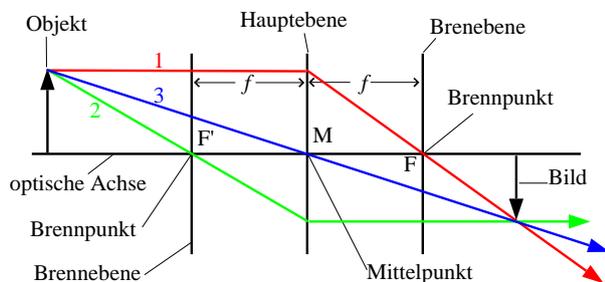


Abbildung 3.6: Konstruktion des Bildes für eine Sammellinse: 1. Ein zur optischen Achse paralleler Strahl wird durch F gebrochen. 2. Ein Strahl, der durch F' geht, wird parallel zur optischen Achse gebrochen. 3. Ein Mittelpunktstrahl wird nicht gebrochen.

3.4 Geometrische Bildkonstruktion

Bisher haben wir nur Abbildungen von punktförmigen Objekten auf der optischen Achse betrachtet. Um die Abbildungen von Objekten endlicher Größe bestimmen zu können, müssen wir auch wissen, wie Punkte des Objektes abgebildet werden, die nicht auf der optischen Achse liegen. In Hinblick auf die Näherung für achsennahe Strahlen, muss die Objektausdehnung aber klein im Vergleich mit a , b , f sein.

Abb. 3.6 zeigt die Grundelemente einer dünnen **Sammellinse**. Die Linse selbst ist auf Ebene reduziert, die als **Hauptebene** bezeichnet wird. Die dazu parallelen Ebenen durch F bzw. F' werden als **Brennebenen** bezeichnet. Das Objekt wird als ein auf der optischen Achse stehender Pfeil dargestellt. Wir verfolgen jetzt drei Strahlen, die die Spitze des Objektpfeils verlassen:

1. Ein Strahl, der parallel zur optischen Achse verläuft, muss nachher durch den Brennpunkt F gehen (vgl. Abb. 3.5a).
2. Ein Strahl, der durch F' geht, wird so gebrochen, dass er nachher parallel zur optischen Achse verläuft (vgl. Abb. 3.5b).
3. Ein Strahl, der durch den Mittelpunkt geht, ändert seine Richtung nicht. (Im Mittelpunkt sind die beiden Flächen der Linse parallel).

Je zwei dieser drei Regeln genügen, um das Bild des als Pfeil dargestellten Objektes geometrisch zu konstruieren.

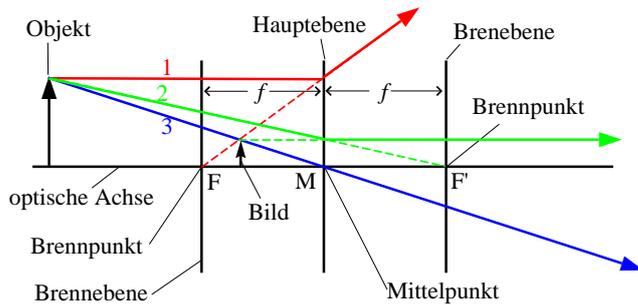


Abbildung 3.7: Konstruktion des Bildes für eine Zerstreuungslinse: 1. Ein zur optischen Achse paralleler Strahl wird so gebrochen, so gebrochen, dass sein Rückwärtsverlängerung durch F geht. 2. Ein Strahl, dessen Verlängerung durch F' geht, wird parallel zur optischen Achse gebrochen. 3. Ein Mittelpunktstrahl wird nicht gebrochen.

Frage 3.3 Mit etwas Geometrie kann man zeigen, dass die obigen drei Regeln zur Linsenformel (3.9) führen. Versuchen Sie es.

Die entsprechenden Regeln für eine **Zerstreuungslinse** (s. Abb. 3.7) sind:

1. Ein Strahl, der parallel zur optischen Achse verläuft, wird so gebrochen, dass seine Rückwärtsverlängerung durch den Punkt F (vor der Linse) geht.
2. Ein Strahl, dessen Verlängerung durch den Punkt F' (hinter der Linse) geht, wird so gebrochen, dass er nachher parallel zur optischen Achse verläuft.
3. Ein Strahl, der durch den Mittelpunkt geht, ändert seine Richtung nicht.

Aus Abb. 3.7 erkennt man, dass eine Zerstreuungslinse immer eine *virtuelle* Abbildung (von einem reellen Objekt) erzeugt.

Sowohl für Sammel- als auch für Zerstreuungslinsen gilt, dass eine reelle Abbildung eines reellen Objektes (oder eine virtuelle Abbildung eines virtuellen Objektes) „auf dem Kopf“ steht, während eine virtuelle Abbildung eines reellen Objektes (oder eine reelle Abbildung eines virtuellen Objektes) die gleiche Orientierung wie das Objekt hat. Aus der Geometrie der Abbildungen 3.6 und 3.7 folgt, dass die **Vergrößerung**, d.h. das Verhältnis der Bildgröße zur Objektgröße, gleich dem Verhältnis der Bildweite zur Objektweite ist. Wenn man die Vergrößerung M als negativ für invertierte Bilder definiert, gilt

$$M = -b/a.$$

Frage 3.4 Versuchen Sie durch Probieren herauszubekommen, wie die Eigenschaften des Bildes (Lage, Vergrößerung, reelle oder virtuell) von der Lage des Objektes abhängen. Berücksichtigen Sie dabei auch virtuelle Objekte. Eine interaktive Version der geometrischen Bildkonstruktion finden Sie hier:

http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hall/6645/Lens/lens_e.html

3.5 Linsenfehler

Wir wollen uns noch einmal erinnern, dass alle Betrachtungen über die Abbildungen unter der Näherung achsennaher Strahlen und eines konstanten Brechungsindex n vorgenommen wurden. Sind diese Voraussetzungen verletzt, treten *Linsenfehler*—auch *Aberrationen* genannt—auf. Die wichtigsten sind:

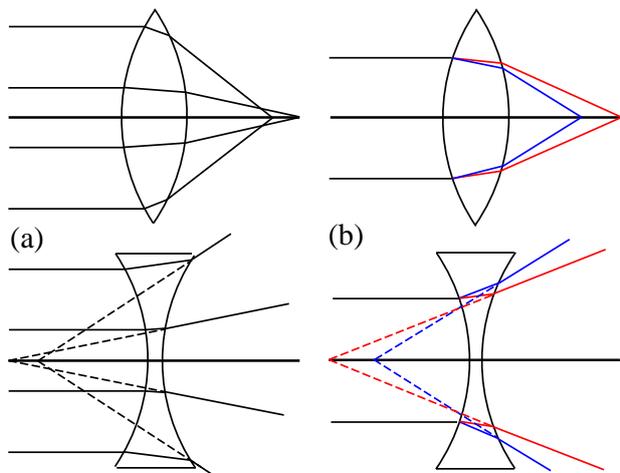


Abbildung 3.8: (a) Sphärische Aberration (Öffnungsfehler), (b) Chromatische Aberration (Farbfehler).

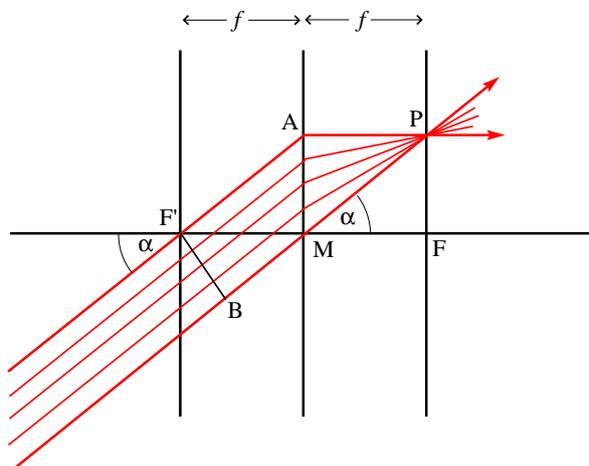


Abbildung 3.9: Ein paralleler Strahlenbündel, der in einem Winkel α zu optische Achse auf eine Sammellinse fällt, wird zu einem Punkt P in der Brennebene fokussiert. Die Entfernung PF ist $f \tan \alpha$.

Sphärische Aberration (Öffnungsfehler) Achsenferne Parallelstrahlen werden stärker gebrochen als achsennahe (Abb. 3.8a). Dieser Fehler kann vermieden werden, wenn die Breite des Strahls durch eine Blende begrenzt wird. Dies hat jedoch den Nachteil, dass weniger Licht durchgelassen wird, was z.B. bei einer Kamera die Anwendung bei schwachen Lichtverhältnissen begrenzt. Außerdem wird das Auflösungsvermögen herabgesetzt (s. weiter unten). Bei Kameraobjektiven wird die sphärische Aberration deshalb durch Anwendung von Linsenkombinationen mit verschiedenen Brechungsindizes.

Chromatische Aberration (Farbfehler) Wegen der Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge (Dispersion) haben verschiedene Farben verschiedene Brennpunkte (Abb. 3.8b). Chromatische Aberration korrigiert man durch Kombination von Linsen aus Materialien mit unterschiedlichen Dispersionen.

Bei fehlerfreien Linsen ist das **Auflösungsvermögen**—d.h. die Fähigkeit, feine Einzelheiten eines Objektes in der Abbildung noch zu trennen—nur noch durch die Lichtwellenlänge begrenzt. Dieses Thema werden wir später in der Wellenoptik behandeln.

Zum Schluss dieses Abschnitts sei auf eine wichtige Eigenschaft der Brennebene einer Sammellinse hingewiesen: Ein Strahlenbündel, der in sich parallel ist, aber nicht parallel zur optischen Achse (Abb. 3.9) wird nicht zum Punkt F aber zu einem anderen Punkt P in der Brennebene fokussiert. Dies folgt aus der Tatsache, dass sehr weit entfernte Objekte in der Brennebene abgebildet werden, und lässt sich auch geometrisch z.B. durch Vergleich der

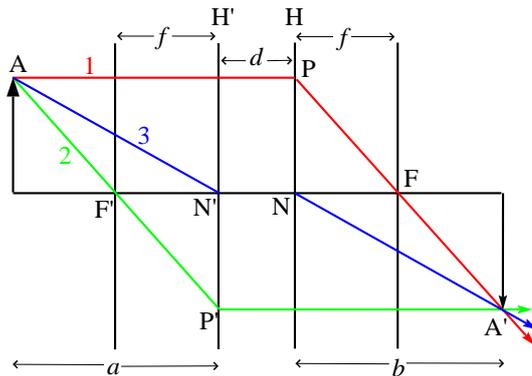


Abbildung 3.10: Bildkonstruktion für eine dicke Linse.

Dreiecke FAM und APM (Abb. 3.9) beweisen.

Nehmen wir an, dass der in der Abb. 3.9 gezeigte Strahlenbündel von einem solchen weit entfernten Objekt (z.B. vom Mond) kommt. Bis zur Ebene $F'B$, die senkrecht zur Strahlrichtung steht, haben alle Strahlen den gleichen Weg. Aus dem Fermatschen Prinzip folgt, dass die weiteren *optischen* Weg aller Strahlen von dieser Ebene bis zum Punkt P (z.B. $F'AP$, BMP) gleich sein müssen.

3.6 Linsenkombinationen und dicke Linsen

Werden zwei dünne Linsen L_1 , L_2 (Brennweiten f_1 , f_2) unmittelbar zusammengesetzt (mit gemeinsamer optischer Achse), so addieren sich ihre Brechkräfte. Es gilt für die Brennweite f der Kombination

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (3.11)$$

Beweis: Ein Strahl, der vom Brennpunkt F_1 der Linse L_1 ausgeht, verläuft zwischen den Linsen parallel zur optischen Achse und wird daher nach F_2 gebrochen. Man kann nun L_1 und L_2 als Linsensystem auffassen, das alle Strahlen von dem Punkt F_1 in den Punkt F_2 fokussiert. Dann sind aber f_1 und f_2 Bild- und Objektweiten und f die Brennweite des Systems. Gleichung (3.11) folgt dann aus der Linsengleichung (3.9).

Achtung: Diese Beziehung gilt nur, wenn der Abstand d der Linsen sehr klein ist gegen f_1 , f_2 .

Da die Brechkraft einer Linse durch den reziproken Wert der Brennweite gegeben ist, ist es in der Augenoptik üblich, die Stärke von Brillengläsern durch die Angabe von $1/f$ in „Dioptrie“ (dpt) anzugeben. ($1 \text{ dpt} = 1 \text{ m}^{-1}$).

Für eine Kombination aus mehreren Linsen (Beispiel: Kameraobjektiv) können wir nicht mehr mit der Näherung dünner Linsen arbeiten.

Ein „dickes“ Linsensystem (Abb. 3.10) lässt sich durch folgende Konstruktion behandeln (wir verzichten hier auf den Beweis):

Die Linse wird durch 2 Hauptebenen (H , H') mit den **Knotenpunkten** N und N' im Abstand d und 2 Brennpunkten F und F' im Abstand f von der jeweiligen Hauptebene dargestellt. Ein Parallelstrahl AP wird an der Hauptebene H durch den Brennpunkt F gebrochen. Ein Brennpunktstrahl $AF'P'$ wird an der Hauptebene H' zum Parallelstrahl. Ein Knotenpunktstrahl AN' verlässt das Linsensystem bei N , wobei Eingangs- und Ausgangsstrahl

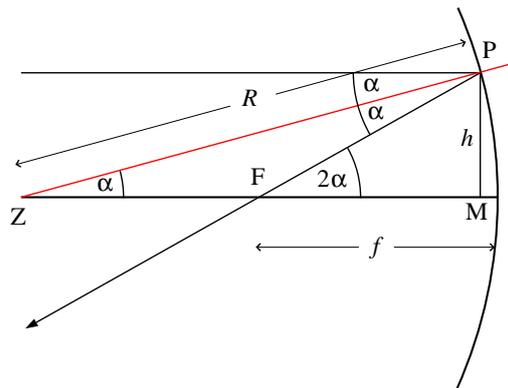


Abbildung 3.11: Abbildung durch einen Konkavspiegel.

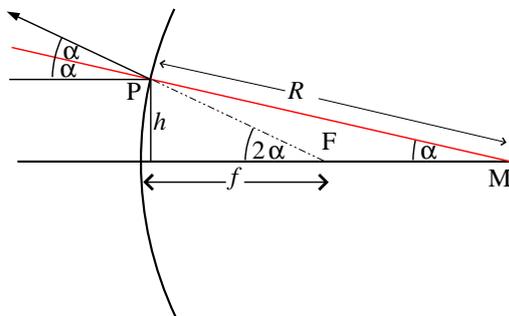


Abbildung 3.12: Abbildung durch einen Konvexspiegel.

parallel sind. Die Linsenformel (3.9) gilt, wenn a und b zu den jeweiligen Hauptebenen gemessen werden. (Natürlich müssen wir die Lagen der Hauptebenen kennen, um die Formel anwenden zu können.)

3.7 Abbildung durch Spiegel

Abbildungen können auch durch Reflexion an kugelförmigen Flächen erzeugt werden. In Abb. 3.11 ist Z das Zentrum der Kugelfläche (Radius R) und ZM ist die optische Achse (M ist der Mittelpunkt des Spiegels). Ein Strahl, der parallel zur optischen Achsen einfällt und den Spiegel im Punkt P trifft, wird so reflektiert, dass der reflektierte Strahl den gleichen Winkel mit dem Radius ZP (α) bildet. Der reflektierte Strahl schneidet die optische Achse bei F. Wenn wir beweisen können, dass alle achsennahen, achsenparallelen Strahlen durch F reflektiert werden, dann ist F der Brennpunkt.

Aus der Geometrie der Skizze ergibt sich zunächst folgendes: Der Winkel PZM ist gleich α , und PFM ist gleich 2α . Aus dem Dreieck PZM folgt $ZM \approx R = h / \tan \alpha \approx h / \alpha$, und aus dem Dreieck PFM $FM \approx f = h / \tan(2\alpha) \approx h / (2\alpha) \approx R/2$.

Die Brennweite eines Konkavspiegels ist gleich der Hälfte des Krümmungsradius: $f = R/2$.

Abb. 3.12 zeigt die Situation für einen Konvexspiegel. Es lässt sich leicht zeigen, dass die obige Beziehung zwischen der Brennweite und dem Radius auch in diesem Fall gilt, wobei der Brennpunkt F hinter statt vor dem Spiegel liegt.

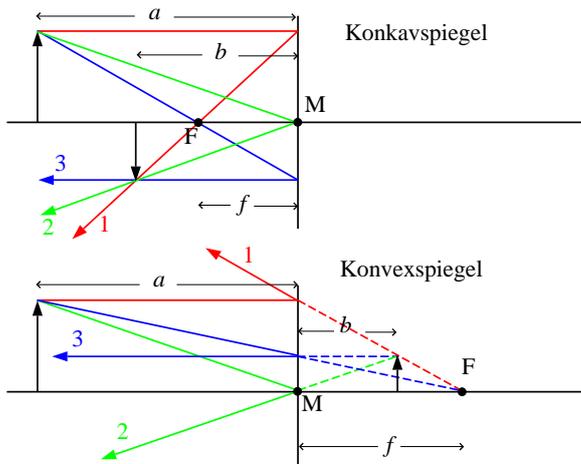


Abbildung 3.13: Regeln für die geometrische Konstruktion des Bildes für Konkav- und Konvexspiegel.

Zur geometrischen Konstruktion der Abbildung gibt es folgende Regeln, die ähnlich denen der Linsen sind (s. S. 18). Sie werden in der Abb. 3.13 verdeutlicht.

Konkavspiegel:

1. Ein Strahl, der parallel zur optischen Achse einfällt, wird durch den Brennpunkt F reflektiert.
2. Ein Strahl, der den Spiegel im Mittelpunkt M trifft, wird symmetrisch zur optischen Achse reflektiert.
3. Ein Strahl, der durch den Brennpunkt F verläuft, wird parallel zur optischen Achse reflektiert.

Konvexspiegel:

1. Ein Strahl, der parallel zur optischen Achse einfällt, wird so reflektiert, dass die Rückwärtsverlängerung durch den Brennpunkt F verläuft.
2. Ein Strahl, der den Spiegel im Mittelpunkt M trifft, wird symmetrisch zur optischen Achse reflektiert.
3. Ein Strahl, dessen Vorwärtsverlängerung durch den Brennpunkt F verläuft, wird parallel zur optischen Achse reflektiert.

Aus der Betrachtung der Abb. 3.13 wird klar, dass sich ein Konkavspiegel wie eine Sammellinse und ein Konvexspiegel wie eine Zerstreuungslinse verhält. Die Bildräume sind jedoch gegenüber der Linse vertauscht: Beim Spiegel sind die virtuellen Bilder hinter, die realen Bilder vor dem Spiegel; bei der Linse ist es umgekehrt. Aus der Ähnlichkeit der Geometrie von Linsen und Spiegel ist zu erwarten, dass die Linsengleichung (3.9) auch für Spiegel gilt, wenn die Vorzeichen richtig definiert werden. Die Vorzeichenregeln für Spiegel sind bis auf das Vorzeichen des Radius identisch mit denen für eine brechende Fläche (s. S. 16):

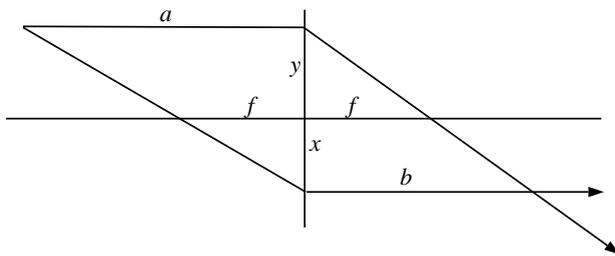


Abbildung 3.14: Vereinfachte Version von Abb. 3.6 zur Ableitung der Linsenformel.

Vorzeichenregeln für Spiegel:

1. R und f sind positiv für Konkav- und negativ für Konvexspiegel.
2. a ist positiv für reelle und negativ für virtuelle Objekte.
3. b ist positiv für reelle und negativ für virtuelle Abbildungen.

Mit dieser Vereinbarung gilt die Formel

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

sowohl für Linsen als auch für Spiegel.

Frage 3.5 Stellen Sie eine Tabelle ähnlich Tabelle 3.1 aber für Spiegel auf.

Mit dieser interaktiven „optischen Bank“ können Sie mit Linsen und Spiegeln experimentieren:

<http://webphysics.davidson.edu/Applets/Optics/Intro.html>

3.8 Antworten zu den Fragen

Frage 3.1 In Gleichung (3.10) ändert sich die Reihenfolge der Terme $1/R_1$ und $1/R_2$, aber nach den auf Seite 16 angegebenen Regeln auch deren Vorzeichen, so dass der Wert von f sich nicht ändert.

Frage 3.2 Wenn die Linse von innen nach außen dünner wird, handelt sich um eine Sammellinse, sonst um eine Zerstreuungslinse.

Frage 3.3 Abb. 3.14 ist eine „Skelett“-Version von Abb. 3.6. Aus den Eigenschaften von ähnlichen Dreiecken folgt

$$\frac{f}{a} = \frac{x}{x+y}$$

und

$$\frac{f}{b} = \frac{y}{x+y}$$

und damit

$$\frac{f}{a} + \frac{f}{b} = 1$$

oder

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Frage 3.4 S. Tabelle 3.1.

Tabelle 3.1: Zusammenfassung der Abbildungseigenschaften von Sammellinsen ($f > 0$) und Zerstreuungslinsen ($f < 0$).

	a		b		M		Objekt	Bild
	von	bis	von	bis	von	bis		
$f > 0$	∞	$2f$	f	$2f$	0	-1	reell	reell
	$2f$	f	$2f$	∞	-1	$-\infty$	reell	reell
	f	0	$-\infty$	0	∞	1	reell	virtuell
	0	$-\infty$	0	f	1	0	virtuell	reell
$f < 0$	∞	0	f	0	0	1	reell	virtuell
	0	f	0	∞	1	∞	virtuell	reell
	f	$2f$	$-\infty$	$2f$	$-\infty$	-1	virtuell	virtuell
	$2f$	$-\infty$	$2f$	0	-1	0	virtuell	virtuell

Frage 3.5 Tabelle 3.1 gilt auch für Spiegel.

Kapitel 4

Die optischen Instrumente

4.1 Das Auge

4.1.1 Aufbau und Funktion

Der Augapfel (s. Abb. 4.1) ist ein fast kugelförmiger Körper, der innen durch eine bikonvexe, elastische Linse in zwei Kammern geteilt wird, die mit verschiedenen Flüssigkeiten gefüllt sind. Die Brechzahl beider Flüssigkeiten beträgt 1,336, die der Linse 1,4. Das Licht tritt durch die gewölbte, durchsichtige Hornhaut ein und wird über lichtempfindliche Nervenzellen auf der Netzhaut wahrgenommen. Die Linse und der Innenraum des Auges bilden zusammen eine optische Sammellinse, die die Aufgabe hat, eine reelle Abbildung der betrachteten Gegenstände auf die Netzhaut zu werfen. Vor der Linse befindet sich die Regenbogenhaut (Iris), deren Öffnung, die Pupille, durch unbewusste Muskelkontraktionen verkleinert oder vergrößert werden kann, um das Auge auf verschiedene Helligkeiten einzustellen.

Um das Auge auf Objekte in verschiedenen Entfernungen einstellen zu können, muss entweder die Bildweite oder die Brennweite f veränderlich sein. Im menschlichen Auge wird die zweite Möglichkeit verwendet. Durch Änderung der Linsenkrümmung wird die Brennweite verändert. Diesen Vorgang nennt man Akkommodation. Im entspannten Zustand ist das normal Auge auf unendlich eingestellt.

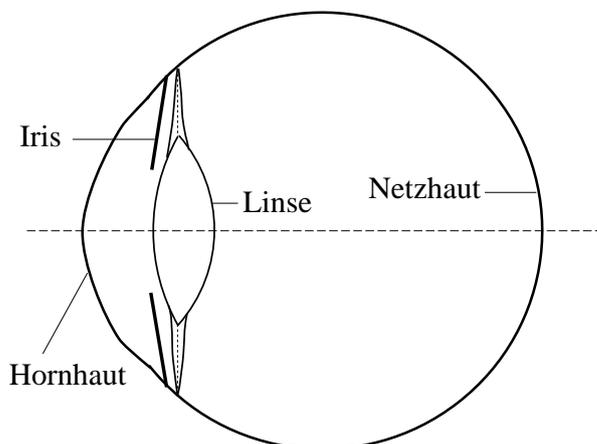


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung eines Querschnitts durch das menschliche Auge.

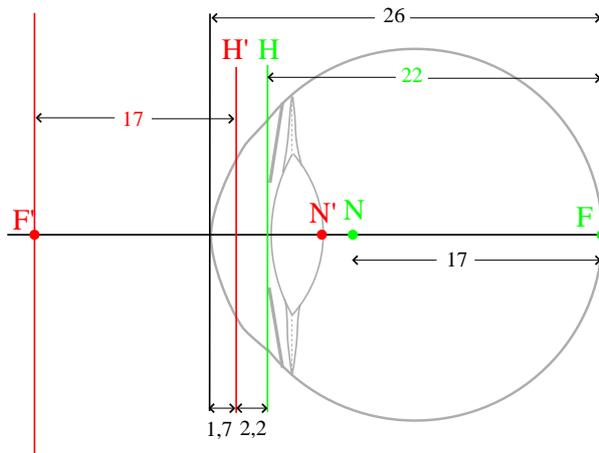


Abbildung 4.2: Kardinalelemente des optischen Systems des Auges bei Einstellung auf ∞ . Die Maßangaben sind in mm.

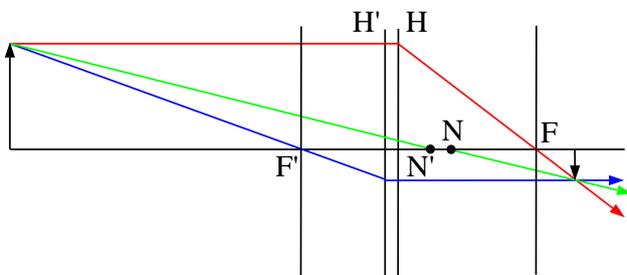


Abbildung 4.3: Geometrische Konstruktion zur Berechnung des Verlaufs der Lichtstrahlen durch das Auge (vergl. Abb. 3.10).

Die vordere Kammer und die Linse bilden zusammen eine **dicke Linse**, wobei der Objektraum und der Bildraum mit unterschiedlichen Medien ($n = 1$ bzw. $n = 1,336$) gefüllt sind. Dies hat zur Folge zum einen, dass die beiden Brennweiten f bzw. f' unterschiedlich sind, und zum anderen, dass die beiden Knotenpunkte nicht auf den Hauptebenen liegen (vergl. Abb. 3.10). Abb. 4.2 zeigt die sog. Kardinalelemente (Brennpunkte, Brennebenen, Hauptebenen und Knotenpunkte) des Auges mit Angabe der ungefähren Entfernungen, die natürlich von Person zu Person unterschiedlich sind, für den Fall, dass die Linse auf weit entfernte Objekte eingestellt ist.

Die Hauptebenen sind kurz hinter der Hornhaut. Ihr Abstand—und der der Knotenpunkte—beträgt 2,2 mm. Der Abstand der Hauptebene H von der Netzhaut, d.h. die Brennweite f beträgt 22 mm, und die vordere Brennweite ist $f' = 17$ mm. Die Entfernung des Knotenpunkts N von der Netzhaut ist $d_N = 17$ mm. Da sich die Brennweite der Augenlinse im ganzen Akkommodationsbereich nur um rd. 10% ändert (s. Aufgabe unten), können wir d_N als praktisch konstant betrachten.

Die Größe d_N ist entscheidend für die Berechnung der Größe der Abbildung eines Objekts auf der Netzhaut. Dazu betrachten wir die geometrische Konstruktion für den Verlauf von Lichtstrahlen durch das Auge (Abb. 4.3). Die Regeln sind die gleichen, die im Abschnitt 3.6 angegeben wurden, nur müssen wir die Tatsache berücksichtigen, dass die Knotenpunkte nicht auf den Hauptebenen liegen. Aus der Geometrie der Konstruktion folgt, dass die Größe v der Abbildung auf der Netzhaut eines Objekts der Größe u in einer Entfernung a durch

$$v = au/d_N$$

gegeben wird, wobei der Abstand zwischen H' und N' im Vergleich zu a vernachlässigt wurde.

Frage 4.1 Zeigen Sie, dass die hintere Brennweite der Augenlinse nur zwischen rd. 20 mm und 22 mm einstellbar sein muss, um Objekte von 25 cm bis unendlich akkommodieren zu können. (Man kann davon ausgehen, dass sich die Lage der Hauptebene während der Akkommodation nur unwesentlich verändert).

4.1.2 Augenfehler

Die am häufigsten auftretenden durch Brillen bzw. Kontaktlinsen korrigierbaren Augenfehler sind **Kurzsichtigkeit (Myopie)**, **Weitsichtigkeit (Hyperopie)** und **Astigmatismus (Stabsichtigkeit)**.

Beim **kurzsichtigen** Auge können trotz Fernakkommodation entfernte Objekte nicht scharf gesehen werden. Im Vergleich zur Wirkung des brechenden Systems ist das Auge zu lang gebaut. Um b zu verlängern, wird diese Fehlsichtigkeit mittels Konkavlinen korrigiert. Die Brennweite der benötigten Linse lässt sich durch folgende Überlegung bestimmen: Nehmen wir an, dass der betroffene nur bis zu einer maximalen Entfernung d_{\max} scharf sehen kann. Die Linse muss ein unendlich weit entferntes Objekt bei der Bildweite d_{\max} abbilden, damit alle Gegenstände im Sehbereich abgebildet werden. Die Brennweite ist daher gegeben durch

$$f = -d_{\max}.$$

Beim **weitsichtigen** Auge reicht die Akkommodation im Nahbereich nicht mehr aus. Im Vergleich zur Wirkung des brechenden Systems ist das Auge zu kurz gebaut. Um b zu verkürzen, wird diese Fehlsichtigkeit mittels Konvexlinsen korrigiert. Es sei d_{\min} die minimale Entfernung eines Objektes, das noch scharf gesehen wird. Bei einer weitsichtigen Person ist $d_{\min} > d_o$, wo d_o die minimale Entfernung für ein „normales“ Auge ist¹. Die Linse muss also von einem Objekt in der Entfernung d_o ein virtuelles Bild in der Entfernung d_{\min} erzeugen, d.h. $a = d_o$ und $b = -d_{\min}$, woraus folgt:

$$f = \frac{d_{\min} d_o}{d_{\min} - d_o}.$$

Beim **stabsichtigen** Auge weist das brechende System in verschiedenen Schnitten unterschiedliche Brennweiten auf. Das hat zur Folge, dass mit diesem Auge ein Objektpunkt nicht in einem Bildpunkt abgebildet wird, sondern in zwei 90° zueinander liegenden Bildlinien, die nicht die gleiche Bildweite haben. Um diese Fehlsichtigkeit zu korrigieren, benötigt man Zylinderlinsen.

Frage 4.2 Welche Brille braucht ein Mensch, der Objekte in einer Entfernung von weniger als 50 cm nicht scharf sehen kann?

4.2 Die Lupe

Das einfachste optische Instrument, das kleine Objekte „vergrößert“, um Einzelheiten für das menschliche Auge sichtbar zu machen, die sonst verborgen blieben, ist die Lupe, die aus einer einfachen Sammellinse besteht, die direkt vor dem Auge gehalten wird (Abb. 4.4). Das

¹Dieser Wert ist natürlich willkürlich und wird meist mit 25 cm abgeschätzt.

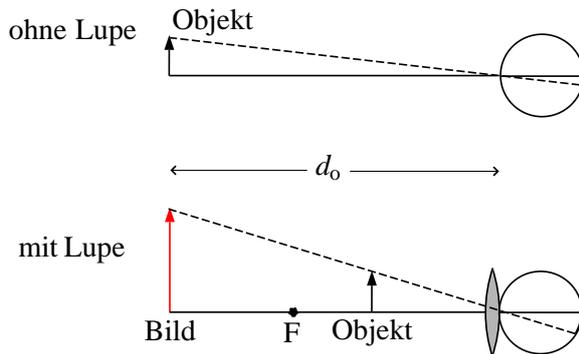


Abbildung 4.4: Zur Funktionsweise einer Lupe.

Objekt (Größe u) befindet sich zwischen der vorderen Brennebene und der Linse. Es entsteht ein virtuelles Bild (Größe v), das weiter entfernt von der Linse liegt. Dieses wird durch das Auge auf die Netzhaut reell abgebildet.

Die Abbildung ist zwar größer, aber weiter weg, was die Vergrößerung scheinbar aufhebt. Der Vorteil der Lupe liegt darin, dass das Objekt näher an das Auge herangeführt werden kann, weil sich das Auge auf die Abbildung fokussiert. Die maximal mögliche Größe der Abbildung auf der Netzhaut ist dann erreicht, wenn sich die Abbildung in der Entfernung d_o vom Auge steht. Um die Objektweite a zu bestimmen, setzen wir also $b = -d_o$ in die Linsengleichung (3.9) ein und erhalten $1/a = 1/f + 1/d_o$ ($f =$ Brennweite der Lupe). Die Vergrößerung ist $|b/a|$, also

Vergößerung einer Lupe:

$$V = 1 + d_o/f. \quad (4.1)$$

Frage 4.3 Welche Brennweite muss für eine Lupe gewählt werden, um eine Vergrößerung von 5 zu erreichen? Warum gibt es keine Lupen mit etwa 100facher Vergrößerung?

4.3 Das Mikroskop

In seiner einfachsten Form besteht das Mikroskop (Abb. 4.5) aus zwei Sammellinsen. Die erste Linse—das Objektiv—erzeugt ein reelles, vergrößertes Bild des Objekts, während die zweite Linse—das Okular—als Lupe dient, durch die die erste Abbildung betrachtet wird. Die Vergrößerung des Objektivs ist $V_1 = b/a$. Für eine möglichst hohe Vergrößerung muss das Objekt in der Nähe des Brennpunktes sein, so dass in guter Näherung $V_1 = b/f_1$ gilt, wobei f_1 die Brennweite des Objektivs bedeutet. Die subjektive Vergrößerung des Okulars ist durch Gleichung (4.1) mit $f = f_2 =$ Brennweite des Okulars gegeben. Die Gesamtvergrößerung ist damit

$$V = \left(1 + \frac{d_o}{f_2}\right) \frac{b}{f_1}.$$

Für hohe Vergrößerungen müssen die Brennweiten f_1 und f_2 möglichst klein sein. Damit gilt $d_o/f_2 \gg 1$ und $b \approx l =$ Abstand der Linsen (Tubuslänge). Die Vergrößerung ist also in guter Näherung:

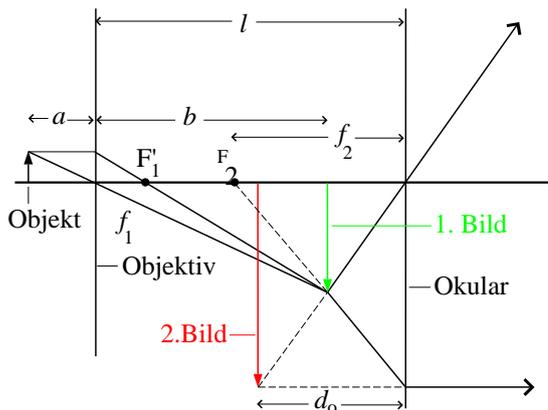


Abbildung 4.5: Schematische Darstellung des Strahlengangs durch ein Mikroskop.

Vergrößerung des Mikroskops:

$$V = \frac{ld_o}{f_1 f_2}$$

Wir haben die Konstruktion eines Mikroskops hier bewusst stark vereinfacht dargestellt. In Wirklichkeit muss man neben der Vergrößerung u.a. folgende Probleme berücksichtigen:

Auflösung: Das Auflösungsvermögen eines Mikroskops wird durch die Wellenlänge des Lichtes begrenzt. Aus diesem Grund hat es keinen Sinn, ein Lichtmikroskop mit einer Vergrößerung von mehr als rd. 2000 zu konstruieren.

Linsenfehler: Um die theoretisch mögliche Auflösung zu erreichen, müssen Linsenfehler wie chromatische und sphärische Aberration möglichst vermieden werden. Die in der Praxis verwendeten Okulare und Objektive sind deshalb komplexe Linsensysteme.

Beleuchtung: Die Lichtintensität einer vergrößerten Abbildung nimmt mit dem Quadrat der Vergrößerung ab. Eine effiziente Beleuchtung des Objektes ist deshalb von großer Bedeutung.

4.4 Das Fernrohr

Fernrohre werden verwendet, um weit entfernte Objekte zu betrachten. Die Objektweite kann also als unendlich groß angenommen werden. Die Vergrößerung wird, ähnlich wie bei der Lupe, auf die Abbildung auf der Netzhaut bezogen.

Das prinzipiell einfachste Fernrohr ist das astronomische bzw. Keplersche Fernrohr (s. Abb. 4.6), das in der einfachsten Form aus zwei Sammellinsen mit den Brennweiten f_1 , f_2 im Abstand $l = f_1 + f_2$ besteht. Zwei entfernte Objekte (z.B. Sterne) werden an den Punkten A, A' in der hinteren Brennebene des Objektivs, die mit der vorderen Brennebene des Okulars zusammenfällt, als reelles Bild abgebildet. Das Okular erzeugt ein unendlich weit entferntes, virtuelles Bild der ersten Abbildung. Der Abstand der beiden Sterne auf der Netzhaut des Auges ist proportional zu $\tan \alpha$ ohne Fernrohr und $\tan \beta$ mit Fernrohr. Die Vergrößerung ist $V = \tan \beta / \tan \alpha$ und damit

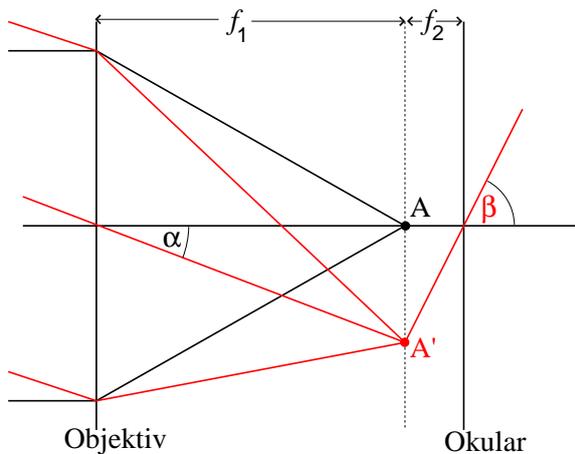


Abbildung 4.6: Strahlengang eines astronomischen Fernrohrs.

Vergrößerung des astronomischen Fernrohrs:

$$V = f_1/f_2.$$

Daraus folgt, dass die Brennweite des Objektivs möglichst groß, die des Okulars möglichst klein sein muss.

Das astronomische Fernrohr erzeugt ein umgekehrtes Bild und ist deshalb für terrestrische Zwecke ungeeignet. Ein aufrechtes Bild kann erzeugt werden durch

- eine Zwischenlinse, die ein zweites reelles Zwischenbild erzeugt (das Erdfernrohr),
- zwei 90°-Prismen, wie im Feldstecher bzw. Feldglas, mit dem weiteren Vorteil, dass der Tubus „gefaltet“ wird, so dass die äußere Länge reduziert wird,
- Ersetzen des Okulars des astronomischen Fernrohrs durch eine Zerstreulinse (holländisches Fernrohr).

Die beiden Umkehrprismen des Feldstechers müssen „gekreuzt“ sein: Eins vertauscht oben und unten, das andere links und rechts; das Ergebnis ist eine Rotation um 180°.

Große Fernrohre für astronomische Zwecke müssen ein möglichst großes Objektiv haben, um so viel Licht wie möglich „einzufangen“, und um ein gutes Auflösungsvermögen zu erreichen. Es ist aber sehr schwierig und aufwendig, große Glaslinsen (von mehr als 1 m Durchmesser) herzustellen, die frei von störenden Linsenfehlern sind. Aus diesem Grund verwenden die großen Fernrohre einen Spiegel als Objektiv. Das erste Bild entsteht in der Nähe des Brennpunktes des Spiegels und muss mittels eines weiteren, kleineren Spiegels entweder seitlich oder durch ein kleines Loch im Hauptspiegel zum Okular gebracht werden.

4.5 Die Kamera

Ein Fotoapparat funktioniert im Prinzip wie das Auge: Eine Sammellinse wirft eine reelle Abbildung des Objekts auf eine Photoplatte bzw. einen Film. Die Entfernungseinstellung erfolgt durch Änderung des Abstandes zwischen Linse und Film. Das Objektiv ist im allgemeinen ein komplexes Linsensystem, um Linsenfehler zu verhindern. Vor der Linse befindet

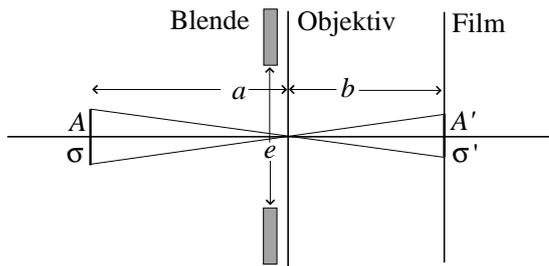


Abbildung 4.7: Zur Belichtungsintensität des Films in einem Fotoapparat.

sich eine Blende mit veränderlichem Öffnungsdurchmesser. Die Blendenstellung beeinflusst a) die Intensität des Bildes und b) die Schärfentiefe.

Betrachten wir die Objektfläche A (Abb. 4.7) mit der Leuchtstärke (Strahlungsleistung pro Flächeneinheit) σ . Diese Fläche strahlt insgesamt die Leistung $A\sigma$ aus, die (bei isotroper Strahlung) in der Entfernung a (Linse) über die Fläche $4\pi a^2$ verteilt ist. Die Leistung, die durch die Blendenöffnung (Fläche $\pi(e/2)^2$) geht, ist daher

$$I = A\sigma \frac{\pi(e/2)^2}{4\pi a^2} = \frac{Ae^2\sigma}{16a^2}.$$

Diese Energie erreicht die Fläche A' . Die Beleuchtungsstärke hier ist damit

$$\sigma' = \frac{Ae^2\sigma}{16A'a^2}$$

Das Verhältnis der Flächen ist $A/A' = (a/b)^2$. Da die Objektentfernung meist groß im Vergleich zu den Abmessungen der Kamera ist, gilt $b \approx f$. Wir erhalten also schließlich

$$\sigma' = \frac{1}{16} \left(\frac{e}{f} \right)^2 \sigma.$$

Die Belichtungsintensität des Films hängt also im wesentlichen vom Verhältnis $e : f$ ab. Auf Kameraobjektiven findet man die Angabe dieses Wertes in der Form $1 : x$, wo $x = f/e$ (z.B. 1:2.8). Je kleiner der Wert von x , umso größer ist die Lichtstärke des Objektivs. Der auf dem Objektiv angegebene Wert entspricht der größten Blendenöffnung. Bei älteren Kameras mit manueller Blendeneinstellung werden die Werte von f/e in Abständen angegeben, die einem Faktor 2 in $(f/e)^2$ entsprechen (8, 11, 16, 22, ...).

Wird die Kamera so eingestellt, dass der Punkt A (Entfernung a) auf dem Film bei B scharf abgebildet wird (Abb. 4.8), so werden alle Punkte zwischen A' (Abbildung B') und A'' (Abbildung B'') in der Filmebene als Scheiben mit einem maximalen Durchmesser d abgebildet. Ist d gerade die Auflösung (Korngröße) des Films, macht sich die Unschärfe in diesem Bereich nicht bemerkbar. Der Abstand $x = A'A''$ heißt Schärfentiefe.

Aus der Geometrie des Bildes ist zu erkennen, dass die Größe d der Scheibe proportional zur Blendenöffnung e sein muss. Eine kleine Blende bedeutet also eine größere Schärfentiefe.

4.6 Antworten zu den Fragen

Frage 4.1 Bei der Einstellung auf ∞ ist die Brennweite gleich der Bildweite, also $f =$

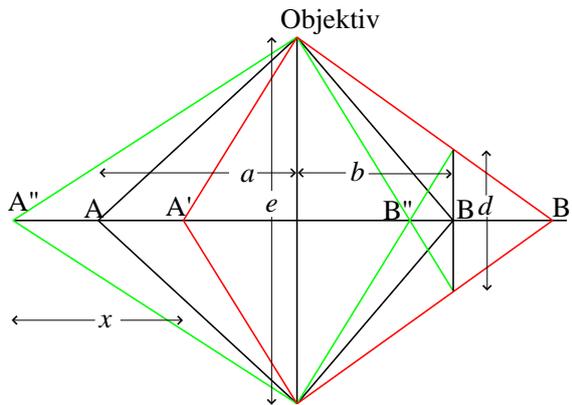


Abbildung 4.8: Die Schärfentiefe eines Kameraobjektivs.

$b = 22$ mm. Bei der Einstellung auf 250 mm gilt $a = 250$ mm, $b = 22$ mm und aus der Linsenformel $f \approx 20$ mm.

Frage 4.2 Mit $d_{\min} = 50$ cm und $d_o = 25$ cm ist

$$f = \frac{50 \cdot 25}{50 - 25} \text{ cm} = 50 \text{ cm.}$$

Frage 4.3 Mit $V = 5$ und $d_o = 25$ cm ist $f = 6,25$ cm. Für stärkere Vergrößerungen braucht man immer kleinere Brennweiten, die nach Gleichung (3.10) nur durch kleinere Krümmungsradien erreicht werden können. Für eine Vergrößerung von 100 muss $f = 2,5$ mm sein. Für eine bikonvexe Linse in Luft mit $R_1 = R_2 = R$ und $n = 1,4$ ergibt Gleichung (3.10) $R = 1,4$ mm. Um sphärische Aberration zu vermeiden, muss die Linse erheblich kleiner als R sein. Eine solche Linse ist als Lupe nicht zu gebrauchen.

Kapitel 5

Licht als elektromagnetische Welle

5.1 Einleitung

In den nachfolgenden Kapiteln werden die Phänomene behandelt, die auf die Wellennatur des Lichtes zurückzuführen sind (Beugung und Interferenz). Zuvor müssen wir uns mit der Frage beschäftigen, wie Wellen in drei Dimensionen mathematisch beschrieben werden, d.h. wir müssen die Behandlung von eindimensionalen Wellen (s. Mechanik-Skript, Abschnitt 9.2 auf drei Dimensionen erweitern).

Ferner wird es erforderlich sein, einige Erkenntnisse der Elektrodynamik, die im dritten Semester behandelt wird, vorwegzunehmen, um die physikalische Natur der elektromagnetischen Wellen verstehen zu können. Es geht hier im wesentlichen um folgende Punkte:

1. Die Quellen von elektromagnetischen Wellen sind bewegte (beschleunigte) elektrische Ladungen .
2. Licht ist eine transversale Welle und besteht aus gekoppelten elektrischen und magnetischen Feldern.
3. Die Wechselwirkung von Licht mit Materie (Reflexion, Brechung, Absorption) beruht auf die Kräfte, die die elektromagnetischen Felder auf die in der Materie enthaltenen Ladungen (negative Elektronen, positive Atomkerne) ausüben.
4. Eine elektromagnetische Welle transportiert Energie und Impuls.

5.2 Wellen in drei Dimensionen: ebene Wellen und Kugelwellen

Ein ins Wasser geworfener Stein erzeugt kreisförmige Wellen, die sich radial ausbreiten. Linien, die Punkte gleicher Phase verbinden—in diesem Fall Kreise—heißen **Wellenfronten**. In drei Dimensionen sind die Wellenfronten zweidimensionale Flächen. Die Wellenfronten einer punktförmigen Lichtquelle sind Kugelflächen, die eines parallelen Strahlenbündels sind Ebenen. Man spricht daher von **ebenen** Wellen und **Kugelwellen**. Eine Sammellinse

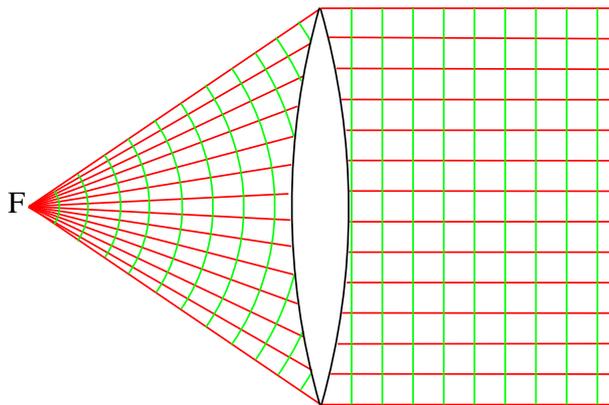


Abbildung 5.1: Zusammenhang zwischen Strahlen und Wellenfronten. Eine Sammellinse wandelt eine vom Brennpunkt kommende Kugelwelle in eine ebene Welle um.

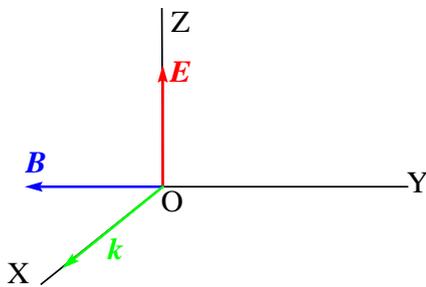


Abbildung 5.2: Die Lagen der Vektoren \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{k} für eine in z -Richtung polarisierte Welle, die sich in x -Richtung bewegt.

wandelt eine vom Brennpunkt kommende Kugelwelle in eine ebene Welle um (s. Abb. 5.1). Die Strahlen sind senkrecht zu den Wellenfronten¹.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, eine ebene Welle, die sich in x -Richtung fortpflanzt. Die Wellenfronten sind in diesem Fall parallel zu y - z -Ebene, und der elektrische Feldvektor liegt in dieser Ebene. Nehmen wir als Beispiel an, dass die Richtung von \mathbf{E} konstant ist. Eine solche Welle heißt linear polarisiert (wir werden später sehen, dass es auch andere Polarisationszustände gibt). Da sich bei dieser Welle nichts in y - oder z -Richtung ändert, können wir die mathematische Beschreibung der Welle direkt aus dem eindimensionalen Fall (s. Mechanik-Skript, Abschnitt 9.2) ableiten:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx + \phi), \quad (5.1)$$

mit $\omega =$ Kreisfrequenz, $k = 2\pi/\lambda$ ($\lambda =$ Wellenlänge) und $\phi =$ Phase.

Das Magnetfeld \mathbf{B} einer elektromagnetischen Wellen steht senkrecht auf den elektrischen Feldvektor und auf die Fortpflanzungsrichtung. Zeigt z.B. der Vektor \mathbf{E} im vorliegenden Fall in z -Richtung, zeigt \mathbf{B} in $-y$ -Richtung. Der Vektor \mathbf{k} mit dem Betrag $k = 2\pi/\lambda$ parallel zur Fortpflanzungsrichtung nennt man den **Wellenvektor**. Die Vektoren \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{k} sind also orthogonal und bilden in der genannten Reihenfolge ein rechtshändiges Achsenkreuz, d.h. das Vektorprodukt $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ zeigt in Richtung von $+\mathbf{k}$ (Abb. 5.2).

Die Ausdehnung auf eine linear polarisierte ebene Welle mit einer beliebigen Ausbreitungsrichtung \mathbf{k} ist sehr einfach: In Gleichung (5.1) ist x die Projektion des Ortsvektors \mathbf{r} auf die x -Achse. Wenn \mathbf{k} nicht parallel zur x -Achse ist, müssen wir nicht mehr auf die x -Achse projizieren, sondern auf \mathbf{k} , und wir erhalten statt kx $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$:

¹Dies gilt allerdings nicht für anisotrope Medien.

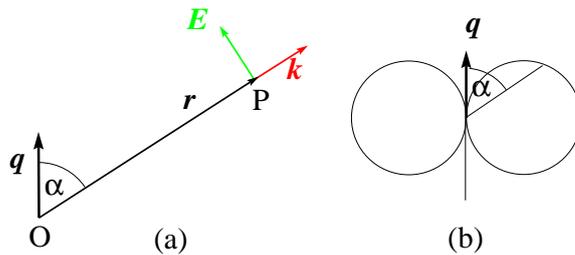


Abbildung 5.3: Das Strahlungsfeld einer schwingenden Ladung. (a) Lage der Vektoren k und E relativ zum Schwingungsvektor q und zum Ortsvektor. (b) Polardiagramm von $|E|$ als Funktion des Winkels α bei konstantem r .

Die Gleichung für das elektrische Feld einer linear polarisierten, ebenen Welle ist

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi). \quad (5.2)$$

Der Magnetfeldvektor \mathbf{B} lässt sich mit Hilfe der Gesetze der Elektrodynamik aus (5.2) ableiten, so dass die Angabe von $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ausreicht, um die Welle festzulegen. Außerdem wird die Wechselwirkung der Welle mit Materie im wesentlichen durch das elektrische Feld bestimmt. Wir werden daher im folgenden meistens nur das elektrische Feld berücksichtigen. Die durch \mathbf{E} und \mathbf{k} aufgespannte Ebene wird als **Polarisationsebene** bezeichnet.

Frage 5.1 An einem bestimmten Ort werden folgende Felder einer elektromagnetischen Welle gemessen:

$$\mathbf{E} = E_0 \cos \omega t, \quad \mathbf{B} = B_0 \cos \omega t.$$

mit

$$\mathbf{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

und

$$\mathbf{B}_0 = \frac{B_0}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

In welcher Richtung bewegt sich die Welle?

Bei einer *Kugelwelle*, die sich vom Ursprung O des Koordinatensystems ausbreitet, ist der Wellenvektor \mathbf{k} überall parallel zum Ortsvektor \mathbf{r} , so dass wir das Skalarprodukt durch das Produkt der Beträge ersetzen können: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr$. Damit wird die Kugelwelle durch eine Funktion der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t - kr) \quad (5.3)$$

beschrieben. Ein wichtiger Spezialfall ist die Strahlung einer mit der Frequenz ω harmonisch schwingenden Ladung, die eine harmonische Welle mit der gleichen Frequenz ausstrahlt.

In Abb. 5.3(a) ist q die Schwingungsrichtung der Ladung am Ursprung. An einem bestimmten Punkt P mit dem Ortsvektor \mathbf{r} ist $\mathbf{k} \parallel \mathbf{r}$. Der Vektor \mathbf{E} ist (wie immer) senkrecht zu \mathbf{k} , d.h. tangential zur Wellenfront, und liegt in der Ebene, die \mathbf{r} und q enthält. Der Betrag von \mathbf{E} ist nicht konstant, sondern ändert sich mit α (dem Winkel zwischen q und \mathbf{r}) und r (der Entfernung) nach

$$E \sim \frac{\sin \alpha}{r}.$$

Abb. 5.3(b) zeigt die Richtungsabhängigkeit von E als Polardiagramm.

Wichtig: Eine schwingende Ladung strahlt keine Energie in Richtung der Bewegung aus.

Die Abhängigkeiten der Amplitude der Welle von α und r lassen sich durch folgende Überlegungen erklären:

- Da Licht eine transversale Welle ist, tragen radiale (d.h. longitudinale) Bewegungen der Ladung nicht zur Amplitude bei. Es wirkt nur die Tangentialkomponente, die proportional zu $\sin \alpha$ ist.
- Der Energiefluss (die Intensität) einer elektromagnetischen Welle ist proportional zum *Quadrat* der Amplitude (Ergebnis der Elektrodynamik). Bei einer Kugelwelle verteilt sich die Gesamtenergie auf einer Fläche, die proportional zu r^2 ist. Die Intensität nimmt daher mit r^{-2} , die Amplitude mit r^{-1} ab.

5.3 Das Prinzip von Huygens

Die Fortpflanzung einer unendlich ausgedehnten, ebenen Welle oder einer Kugelwelle ist einfach zu beschreiben: Die Wellenfront bewegt sich parallel bzw. radial mit der Geschwindigkeit c . Schwieriger wird es, wenn die Wellenfront durch Hindernisse unterbrochen wird, z.B. wenn eine ebene Welle auf eine Wand aus nicht durchsichtigem Material trifft, in der sich Öffnungen befinden. Wie breitet sich die Welle hinter den Öffnungen aus?

Eine Antwort auf diese Frage gab schon 1678 der holländische Physiker und Mathematiker Christian Huygens (1629–95):

Prinzip von Huygens: Jeder Punkt auf der Wellenfront verhält sich wie die Quelle einer Kugelwelle. Die Lage der Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt ist die Einhüllende dieser Kugelwellen.

Dieses Verhalten hat zur Folge, dass ein durch eine Lochblende begrenzter, paralleler Lichtstrahl die Tendenz hat, sich zu verbreitern. Dieses Phänomen (Beugung) werden wir später quantitativ behandeln.

Eine sehr einfache Anwendung des Prinzips ist die Erklärung des Brechungsgesetzes (2.1): In Abb. 5.4 bewegt sich die Wellenfront AB mit der Geschwindigkeit c/n_1 in einem Medium mit dem Brechungsindex n_1 und trifft mit einem Einfallswinkel α auf die Grenze zu einem anderen Medium mit dem Brechungsindex n_2 . In dem Augenblick, in dem die Wellenfront die Grenze beim Punkt C erreicht, wird eine Kugelwelle ausgelöst, die sich vom Punkt C im zweiten Medium mit der Geschwindigkeit c/n_2 ausbreitet. Gleichzeitig entsteht an der Stelle D eine Kugelwelle, die sich noch mit der Geschwindigkeit c/n_1 ausbreitet.

Es sei Δt die Zeit, die die Kugelwelle von D braucht, um den Punkt F auf der Grenzfläche zu erreichen. Dann gilt $DF = c\Delta t/n_1$. Die neue Wellenfront EF ist die Tangente von F zur Kugelwelle von C. Die Strecke CE ist $c\Delta t/n_2$. Damit ist $DF/CE = n_2/n_1$. Aus den Dreiecken CDF und CEF folgt $DF = CF\sin \alpha$ und $CE = CF\sin \beta$ und damit schließlich $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$.

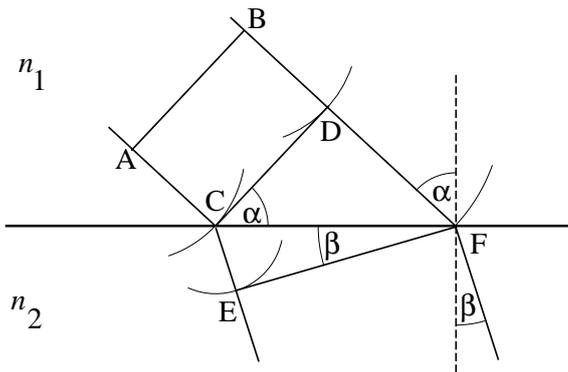


Abbildung 5.4: Anwendung des Prinzips von Huygens zur Ableitung des Brechungsgesetzes.

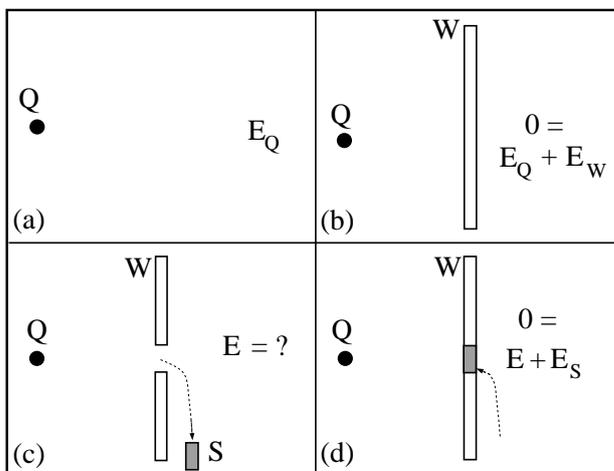


Abbildung 5.5: Zur Erklärung des Prinzips von Huygens: (a) Lichtquelle Q, Strahlungsfeld E_Q . (b) Hinter der Wand: Strahlungsfeld = 0. (c) Wand mit Loch. (d) Loch mit Stopfen geschlossen.

Hier ist eine interaktive Demonstration der Wellenbewegung bei Reflexion und Brechung:
<http://didaktik.physik.uni-wuerzburg.de/~pkrahmer/ntnujava/propagation/propagation.html>

Der Beweis für die Richtigkeit des Prinzips von Huygens mit Hilfe der Theorie der Elektrodynamik ist recht kompliziert. Es gibt aber ein schönes qualitatives Argument, das von Feynman stammt, und nur von der Tatsache Gebrauch macht, dass die einzigen möglichen Quellen elektromagnetischer Strahlung beschleunigte Ladungen sind:

Abb. 5.5a zeigt schematisch eine Quelle Q, die im Raum ein Strahlungsfeld E_Q erzeugt. Nun wird durch eine dünne, undurchsichtige Wand W (Abb. 5.5b) erreicht, dass das Licht der Quelle abgeblockt wird. Hinter der Wand ist es dunkel, d.h. es gibt dort kein elektromagnetisches Feld. Die in der Wand befindlichen Ladungen, die sich unter dem Einfluss des Feldes E_Q bewegen, erzeugen ein Feld E_W , die das Feld E_Q überall hinter der Wand genau aufhebt:

$$E_Q + E_W = 0.$$

Jetzt entfernen wir ein Stück S aus der Wand (Abb. 5.5c). Wie können wir das Lichtfeld E hinter dem Loch berechnen? Um diese Frage zu beantworten, machen wir das Loch einfach wieder zu (Abb. 5.5d), in dem wir das entfernte Stück S als Stopfen verwenden. Nun ist es wieder dunkel! Das durch den Stopfen S erzeugte Feld E_S muss also das Feld E gerade aufheben, d.h.

$$E = -E_S$$

Bis auf das Vorzeichen, das für die Lichtintensität unerheblich ist, ist das Feld des Loches gleich dem Feld des Stopfens. Das Feld des Stopfens wird aber durch Ladungen erzeugt, die mit der Frequenz und der Phase der Welle schwingen.

Um mit dem Huygenschen Prinzip rechnen zu können, müssen wir die Infinitesimalrechnung verwenden: Wir teilen die Wellenfront in kleine Flächenelemente δs auf und betrachten jedes Element als eine Punktquelle mit einer zu δs proportionalen Amplitude. Die Lichtamplitude an einer bestimmten Stelle ergibt sich aus der Überlagerung der von allen Punktquellen kommenden Wellen im Grenzfall $\delta s \rightarrow 0$. Dazu müssen wir aber erst einmal wissen, wie man die Überlagerung von Wellen bzw. Schwingungen behandelt. Dies ist das Thema des nächsten Abschnitts.

5.4 Die Mathematik der Interferenz

Wir betrachten eine Situation, wo sich zwei Lichtwellen mit der gleichen Frequenz ω und dem gleichen Polarisationszustand, aber unterschiedlichen Amplituden A_1, A_2 und Phasen ϕ_1, ϕ_2 treffen. Abhängig von der Phasenbeziehung können sich die beiden Wellen verstärken oder (teilweise) auslöschen. Dieses Phänomen heißt Interferenz. Die resultierende Schwingung (Amplitude A , Phase ϕ) im betrachteten Fall ist die Summe der beiden:

$$A \cos(\omega t + \phi) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2).$$

Wenn wir auf diese Gleichung die trigonometrische Formel

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

anwenden und alle Terme mit $\sin \omega t$ bzw. $\cos \omega t$ auf der linken Seite zusammenziehen, erhalten wir

$$\begin{aligned} (A \cos \phi - A_1 \cos \phi_1 - A_2 \cos \phi_2) \cos \omega t \\ - (A \sin \phi - A_1 \sin \phi_1 - A_2 \sin \phi_2) \sin \omega t = 0. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist nur dann für alle Zeiten gleich 0, wenn beide Koeffizienten von sowohl $\sin \omega t$ als auch $\cos \omega t$ gleich 0 sind, also

$$A \cos \phi = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 \quad (5.4)$$

$$A \sin \phi = A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2 \quad (5.5)$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen quadrieren und addieren, erhalten wir die resultierende Amplitude A in Abhängigkeit von den Amplituden und Phasen der beiden Wellen:

Grundgleichung der Interferenz:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2). \quad (5.6)$$

Die Phase der resultierenden Schwingung ist meistens physikalisch weniger interessant, lässt sich aber aus (5.4) und (5.5) bestimmen, wenn A aus (5.6) bekannt ist.

Bevor wir einige Anwendungen der Interferenzgleichung (5.6) behandeln, wollen wir zunächst einmal eine geometrische Deutung geben, die die Verallgemeinerung auf beliebig viele Schwingungen erleichtert.

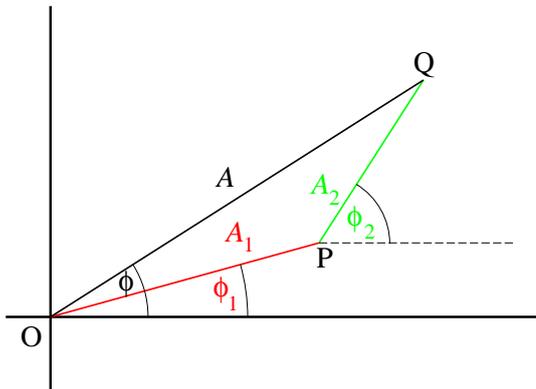


Abbildung 5.6: Amplituden-Phasen-Diagramm für die Überlagerung von zwei Schwingungen.

Die geometrische Deutung ergibt sich aus der Darstellung von Schwingungen als Projektion eines rotierenden Vektors (s. Mechanik-Skript, Abb. 5.2). $A \sin(\omega t + \phi)$ ist die Projektion auf die x -Achse eines Vektors der Länge A , der mit der Drehgeschwindigkeit ω rotiert und zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Winkel ϕ mit der x -Achse bildet. Die resultierende Amplitude mehrerer sich überlagernder Schwingungen ergibt sich daher aus der Vektorsumme. Da der Faktor ωt für alle Schwingungen gleich ist, können wir ihn einfach weglassen, d.h. wir betrachten den Zeitpunkt $t = 0$ oder verwenden ein rotierendes Koordinatensystem. Jede Schwingung mit der Amplitude A und der Phase ϕ wird also durch einen Vektor der Länge A im Winkel ϕ zur x -Achse dargestellt. Eine solche Darstellung wird als Amplituden-Phasen-Diagramm bezeichnet.

Abb. 5.6 zeigt das Amplituden-Phasen-Diagramm für den oben betrachteten Fall von zwei sich überlagernden Schwingungen. Die Vektoren OP (A_1, ϕ_1) und PQ (A_2, ϕ_2) sind die beteiligten Schwingungen, und OQ (A, ϕ) ist die resultierende Schwingung. Gleichung (5.6) folgt direkt aus der Anwendung des Kosinussatzes auf das Dreieck OPQ .

Es ist oft sehr vorteilhaft, Schwingungen oder Wellen nicht durch trigonometrische sondern durch komplexe Exponentialfunktionen darzustellen. Um dies zu verstehen, vergleichen wir die eben diskutierte Darstellung von Schwingungen im Amplituden-Phasen-Diagramm mit der Darstellung von komplexen Zahlen in der Ebene. Eine komplexe Zahl ($a + ib$) ($i = \sqrt{-1}$) wird dem Punkt (a, b) in der Ebene zugeordnet. Die Polarkoordinaten des Punktes (a, b) sind (r, θ), mit $a = r \cos \theta$ und $b = r \sin \theta$. Es ist also

$$a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \exp(i\theta).$$

Die Exponentialdarstellung (Eulersche Formel) folgt aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion. Die Addition der komplexen Zahlen ist äquivalent zur Vektoraddition in der Ebene. Wir können also die Schwingung (A, ϕ) einfach durch die komplexe Zahl $\tilde{A} = A e^{i\phi}$ darstellen. Nun lässt sich Gleichung (5.6) sehr einfach verallgemeinern: Nehmen wir an, wir haben N Schwingungen mit den Amplituden A_1, A_2, \dots, A_N und den Phasen $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$. Die resultierende Amplitude ergibt sich einfach aus der Summe:

Überlagerung von Schwingungen in der komplexen Darstellung:

$$\tilde{A} = A \exp(i\phi) = \sum_{n=1}^N A_n \exp(i\phi_n). \quad (5.7)$$

Wenn wir uns nur für die *Intensität* interessieren, können wir sie durch Multiplikation von \tilde{A} mit der komplex konjugierten Zahl \tilde{A}^* erhalten:

$$I = A^2 = \tilde{A}\tilde{A}^*.$$

Frage 5.2 Wenn Sie „fit“ im Rechnen mit komplexen Zahlen sind, zeigen Sie, dass die resultierende Intensität von N Wellen mit der gleichen Amplitude a und gleich bleibenden Phasendifferenzen, d.h. $\phi_n = n\phi$, durch

$$I = a^2 \frac{\sin^2(N\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)}$$

gegeben ist. Diese Ergebnis werden wir im Abschnitt 6.3 benötigen.

Im nächsten Kapitel werden wir Beispiel für die Anwendung des Huygenschen Prinzips und der Interferenzformeln behandeln.

Selbstverständlich können auch Wellen mittels komplexer Exponentialfunktionen dargestellt werden. Gleichung (5.2) lautet in komplexer Schreibweise

$$E = E_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi)]. \quad (5.8)$$

5.5 Absorption von Licht

Absorption bedeutet die Umwandlung eines Teils der Lichtenergie in andere Formen, die zu einer Abnahme der Intensität führt. Die Absorptionsprozesse laufen im allgemeinen so ab, dass in einer Strecke δx immer den gleichen Anteil $\alpha \delta x$ der noch verbleibenden Lichtintensität absorbiert wird. Der Intensitätsverlauf $I(x)$ ist daher die Lösung der Differentialgleichung $dI = -\alpha I dx$, d.h.

$$I = I_0 e^{-\alpha x}.$$

Der Absorptionskoeffizient α ist eine Stoffeigenschaft.

Wenn die Welle als komplexe Exponentialfunktion dargestellt wird, z.B. für eine ebene Welle in x -Richtung

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k_m x)},$$

kann die Absorption durch einen komplexen Brechungsindex dargestellt werden: Der Wellenvektor k_m im Medium erhält man aus dem Wellenvektor des Vakuums (k) aus der Beziehung $k_m = nk$. Erweitern wir nun den Brechungsindex n durch einen Imaginärteil, indem wir n durch $n - in'$ ersetzen, erhalten wir mit

$$E = E_0 e^{-n'x} e^{i(\omega t - k_m x)}$$

eine exponential abklingende Welle.

Frage 5.3 Können Sie die Beziehung zwischen α und n' angeben?

5.6 Antworten zu den Fragen

Frage 5.1 Die Fortpflanzungsrichtung ist parallel zu $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, was in diesem Falle $(-1, 1, 0)$ ergibt.

Frage 5.2 Mit $A_n = a$ und $\phi_n = n\phi$ ergibt Gleichung (5.7) eine geometrische Reihe

$$\tilde{A} = a \sum_{n=1}^N (e^{i\phi})^n = a e^{i\phi} \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}}.$$

Daraus ergibt sich für die Intensität

$$I = \tilde{A} \tilde{A}^* = a^2 \frac{1 - \cos(N\phi)}{1 - \cos(\phi)},$$

und mit der trigonometrischen Identität

$$2 \sin(x/2) = \sqrt{1 - \cos x}$$

erhalten wir die gesuchte Formel.

Frage 5.3 Da die Intensität quadratisch von E abhängt, ist $\alpha = 2n'$.

Kapitel 6

Beugung und Interferenz

6.1 Voraussetzung für Interferenz – Kohärenz

Zwei Lichtwellen können nur dann miteinander interferieren, wenn sie eine feste Phasenbeziehung haben. Dies bedeutet natürlich, dass sie die gleiche Frequenz haben müssen, aber diese Bedingung ist nicht ausreichend. „Normale“ Lichtquellen strahlen keine vollkommen monochromatische Wellen ohne Unterbrechung aus. Es gibt statistisch verteilte Phasensprünge, die bei zwei verschiedenen Quellen nicht miteinander korreliert sind.

Was passiert, wenn wir versuchen, zwischen Lichtwellen von unterschiedlichen Quellen Interferenz zu erzeugen? Der Phasenunterschied $\phi_1 - \phi_2$ (Gleichung (5.6)) ist eine statistische Größe, bei der alle möglichen Werte im Intervall $0 \dots 2\pi$ gleich wahrscheinlich vorkommen, und die beobachtete Intensität ist der Mittelwert. Wir erhalten aus (5.6)

$$I = \langle A^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle,$$

wo die spitzen Klammern den zeitlichen Mittelwert bedeuten. Der Mittelwert der Funktion \cos ist aber 0, da positive und negative Werte mit gleicher Häufigkeit vorkommen. Die resultierende Intensität ist also gleich der Summe der Intensitäten der beiden Quellen:

$$I = A_1^2 + A_2^2 = I_1 + I_2.$$

Natürlich kann man Interferenz zwischen Licht von unabhängigen Quellen beobachten, wenn die Beobachtungszeit klein im Vergleich mit der mittleren Zeit zwischen Phasensprüngen ist. Heute ist dies mit Lasern hoher Qualität möglich. Am einfachsten beobachtet man Interferenz jedoch zwischen Wellen, die ursprünglich von der *gleichen* Quelle stammen, aber unterschiedliche optische Wege zurückgelegt haben. Beispiele werden in den nachfolgenden Abschnitten beschrieben. Solche Wellen, die die Bedingung einer festen Phasenbeziehung erfüllen, werden als *kohärent* bezeichnet. Neben der Frequenzgleichheit ist also die Kohärenz eine weitere notwendige Bedingung für Interferenz:

- Bei *kohärenten* Strahlen addieren sich die *Amplituden* → Interferenz,
- bei *inkohärenten* Strahlen addieren sich die *Intensitäten*.

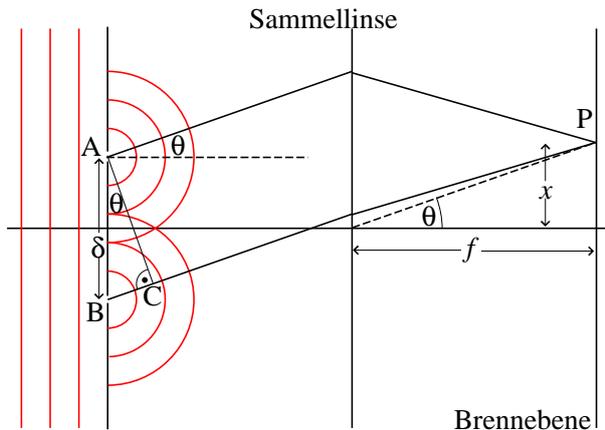


Abbildung 6.1: Interferenz vom Doppelspalt.

Die Phasensprünge einer Lichtquelle erfolgen unregelmäßig, aber in einem bestimmten mittleren zeitlichen Abstand τ . Ist der Unterschied in der Laufzeit Δt der sich interferierenden Strahlen erheblich größer als τ , sind sie nicht mehr kohärent, weil die Wahrscheinlichkeit eines Phasensprungs zwischen den beiden Wellen sehr groß ist. Daher wird τ als die **Kohärenzzeit** der Lichtquelle bezeichnet. Da τ eine statistische Größe ist, erfolgt kein scharfer Übergang, sondern die Interferenzerscheinungen werden mit steigendem Gangunterschied schwächer. Bei $\Delta t \ll \tau$ bekommt man ausgeprägte Interferenzmuster, bei $\Delta t \gg \tau$ addieren sich nur die Intensitäten.

Der Wegunterschied, der der Kohärenzzeit τ entspricht, heißt **Kohärenzlänge**.

6.2 Doppelspalt

In Abb. 6.1 fällt eine ebene, monochromatische Welle senkrecht auf einen Schirm, in dem sich zwei parallele Spalte im Abstand d befinden. Die Spalte sollen so schmal sein, dass sie sich nach dem Prinzip von Huygens als zwei linienförmige Quellen verhalten. (Wie schmal sie sein müssen, werden wir später diskutieren.) Die Wellenfronten sind also zylindrisch. Hinter dem Schirm mit dem Doppelspalt befindet sich eine Sammellinse, und wir betrachten die Verteilung der Lichtintensität in der Brennebene der Linse.

Betrachten wir einen bestimmten Punkt P in der Brennebene im Abstand x von der optischen Achse. Da P in der Brennebene liegt, sind die beiden Strahlen von A und B, die sich im Punkt P treffen, parallel zueinander und zur Verbindungslinie von P zum Mittelpunkt der Linse. Ihre Neigung gegenüber der optischen Achse ist $\theta = \arctan(x/f)$ ($f =$ Brennweite). Wir setzen voraus, dass die beiden Spalte gleich breit sind, dann haben die beiden Strahlen, die am Punkt P interferieren, die gleiche Amplitude. Wir müssen also nur den Phasenunterschied wissen, um die Amplitude und daher die Intensität als Funktion von x bestimmen zu können.

AC ist die Senkrechte zu beiden Strahlrichtungen. Wenn die Strahlen von einem weit entfernten Objekt kämen, wäre AC die Wellenfront und P die Abbildung. Daher folgt aus dem Fermatschen Prinzip, dass die optischen Wege von A nach P und von C nach P gleich sind. Die Wellen haben aber an den Stellen A und B die gleiche Phase. Der Phasenunterschied am Punkt P entsteht daher allein durch den Wegunterschied $BC = d \sin \theta$. Da ein Wegunterschied von einer Wellenlänge einem Phasenunterschied von 2π entspricht, erhalten wir in

diesem Fall

$$\phi = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}.$$

Wenn wir $A_1 = A_2 = a$ setzen, erhalten wir aus Gleichung (5.6) für die Intensität $I = A^2$

$$I = 2a^2(1 + \cos \phi) = 2a^2 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \right]. \quad (6.1)$$

Wenn wir uns auf kleine Winkel beschränken, gilt $\sin \theta \approx \tan \theta = x/f$, und die Intensität als Funktion von x ist

$$I = 2a^2 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi dx}{f\lambda} \right) \right].$$

Dies ist eine einfache, sinusförmige Intensitätsverteilung mit Maxima ($= 4a^2$) an den Stellen $x = n f \lambda / d$ und Minima ($= 0$) an den Stellen $x = (n + 1/2) f \lambda / d$ (n ganzzahlig).

Der Abstand zwischen benachbarten Maxima ist umgekehrt proportional zum Spaltenabstand d . Wenn die Näherung kleiner Winkel nicht mehr gilt, nehmen die Abstände der Interferenzstreifen nach außen hin zu.

Hier können Sie ein virtuelles Experiment mit Laser und Doppelspalt durchführen:
<http://www.Colorado.EDU/physics/2000/applets/twoslitsa.html>

Die so ermittelte Intensitätsverteilung wird auch als **Beugungsbild** des Doppelspalts bezeichnet. Die Verteilung in der Brennebene einer Sammellinse ist—bis auf einen Skalierungsfaktor—identisch mit der Verteilung in einer weit entfernten Ebene ohne Linse. Unter diesen Bedingung spricht man von Fraunhofer¹-Beugung. Der allgemeine Fall (Fresnel²-Beugung) ist eine Leinwand, ohne Linse, in einer beliebigen Entfernung. Das Fresnel-Beugungsbild ist im allgemeinen komplizierter und hängt von der Entfernung ab.

Frage 6.1 Können Sie die Formel für das Fresnel-Beugungsbild des Doppelspalts ableiten?

6.3 Gitter – das Spektrometer

Ein optische Gitter besteht aus einer Anzahl N von parallelen Spalten im gleichen Abstand d . Aus der obigen Betrachtung des Doppelspalts ergibt sich sofort, dass der Phasenunterschied zwischen den Wellen von zwei benachbarten Spalten $\phi = (2\pi/\lambda)d \sin \theta$ beträgt. Die Hauptmaxima der Intensitätsverteilung werden dort sein, wo dieser Phasenunterschied ein Vielfaches von 2π ist, d.h.

$$d \sin \theta = n\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Die Anzahl der Hauptmaxima ist dadurch begrenzt, dass θ bei einem Transmissionsgitter zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$ liegen muss.

¹Joseph von Fraunhofer (1787–1826).

²Augustin Jean Fresnel (1788–1827).

Ist der Gitterabstand d bekannt, lässt sich die Wellenlänge des Lichts (z.B. die charakteristische Strahlung eines Atoms) aus den Lagen der Hauptmaxima bestimmen. Weißes Licht wird durch ein Gitter in seine Bestandteile zerlegt, d.h. es wird ein *Spektrum* erzeugt. Ein Gerät, das Spektren erzeugt und die Bestimmung der Wellenlängen ermöglicht, heißt **Spektrometer**.

Die Genauigkeit, mit der die Lichtwellenlänge mit Hilfe des Gitterspektrometers bestimmt werden kann, hängt von der Breite der Hauptmaxima ab. Deshalb genügt es nicht zu wissen, wo sie liegen; wir müssen auch die Intensitätsverteilung zwischen den Hauptmaxima untersuchen. Gleichung (5.7) ergibt für das Gitter eine geometrische Reihe, deren Summe bekannt ist:

$$A = a \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\phi} = a \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}}.$$

Die Intensität ist das Quadrat des Betrags der komplexen Zahl A , das sich durch Multiplikation mit der komplex konjugierten Zahl A^* ergibt. (Die komplex konjugierte Zahl Z^* der komplexen Zahl Z erhält man, indem man i in Z durch $-i$ ersetzt.)

Intensitätsverteilung eines optischen Gitters:

$$I = AA^* = \left\{ a \frac{\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right\}^2 \quad (6.2)$$

mit $\phi = (2\pi/\lambda)d \sin \theta$.

Die Funktion (6.2) hat Hauptmaxima ($= N^2 a^2$) an den Stellen $\phi = 0, \pm 2\pi \dots$. Zwischen den Hauptmaxima gibt es $N - 1$ Nullstellen und $N - 2$ Nebenmaxima. Mit der Anzahl der Linien N des Gitters werden die Intensitäten der Nebenmaxima sehr schnell vernachlässigbar. Das erste (und größte) Nebenmaximum ist nahe bei $\phi = \pi/N$. Die Intensität an dieser Stelle beträgt relativ zum Hauptmaximum

$$\frac{I_1}{I_{\max}} = \frac{1}{N^2} \frac{\sin^2(\pi/2)}{\sin^2(\pi/2N)} \approx \frac{4}{N\pi^2} \quad \text{für } n \gg 1.$$

Bei nur 100 Linien hat das erste Nebenmaximum nur rd. 0,5% der Intensität des Hauptmaximums. Gewöhnlich verwendet man Gitter mit mehreren Tausend Linien.

Das Amplituden-Phasen-Diagramm eines Gitters ist ein Polygonzug mit gleich bleibenden Winkeln zwischen benachbarten Vektoren. Eine Nullstelle tritt dann auf, wenn das Polygon geschlossen wird. Abb. 6.2 zeigt am Beispiel eines Gitters mit 4 Linien Amplituden-Phasen-Diagramme für das 0. und das 1. Hauptmaximum sowie für die dazwischenliegenden Nullstellen.

Die Intensitätsverteilung für monochromatische Strahlung besteht aus scharfen Linien an den Stellen

$$d \sin \theta = n\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Je nach Wert des Betrags von n spricht man von Spektren nullter, erster, zweiter. . . **Ordnung**. Wie können wir das **Auflösungsvermögen** des Gitterspektrometers—die Fähigkeit, zwischen zwei eng benachbarten Wellenlängen gerade noch zu unterscheiden—definieren?

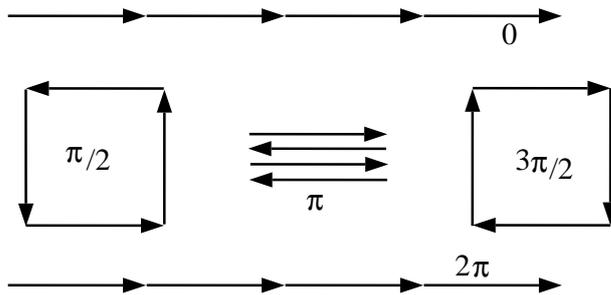


Abbildung 6.2: Amplituden-Phasen-Diagramme für ein Gitter mit 4 Linien. Gezeichnet sind die Anordnungen für das Hauptmaximum nullter Ordnung ($\phi = 0$), das Hauptmaximum erster Ordnung ($\phi = 2\pi$) und die 3 dazwischenliegenden Nullstellen ($\phi = \pi/2, \pi, 3\pi/2$).

Als Kriterium kann man verlangen, dass das Hauptmaximum für die Wellenlänge $\lambda + \delta\lambda$

$$d \sin \theta = n(\lambda + \delta\lambda)$$

an der Stelle des ersten Minimums der Wellenlänge λ

$$d \sin \theta = (n + 1/N)\lambda$$

liegen muss, wenn die beiden Linien gerade noch unterscheidbar sein sollten. Diese Bedingung ist offensichtlich $\lambda = nN\delta\lambda$. Das Auflösungsvermögen definiert man gewöhnlich als das Verhältnis $\lambda/\delta\lambda$:

Auflösungsvermögen eines Gitterspektrometers:

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = nN.$$

Das Auflösungsvermögen hängt von der Anzahl der Gitterlinien N und der Ordnung n ab, nicht jedoch vom Gitterabstand d .

Frage 6.2 Wie viele Gitterlinien benötigt man, um die beiden gelben Linien des Natrium-Spektrums (589,0 nm bzw. 590,6 nm) auflösen zu können?

6.4 Spalt- und Lochblende

Bisher haben wir die Spalte als „unendlich schmal“ betrachtet. In diesem Abschnitt wollen wir die Intensitätsverteilung eines endlich breiten Spalts berechnen.

Abb. 6.3 zeigt einen Spalt AB der Breite b , der mit einer ebenen Welle bei senkrechtem Einfall beleuchtet wird. Wie im Falle des Doppelspalts betrachten wir die Intensitätsverteilung in der Brennebene einer Sammellinse (Fraunhofer-Beugung). Ein Streifen mit der Breite dx in einer Entfernung x vom Punkt A macht einen Beitrag dx/b zur Amplitude mit der Phase $(2\pi/\lambda)x \sin \theta$. Mit der Abkürzung $\phi = (2\pi/\lambda)b \sin \theta$ (ϕ ist der Phasenunterschied zwischen A und B) erhalten wir für die Gesamtamplitude

$$A = \int_0^b e^{i\phi x/b} dx/b = \frac{[e^{i\phi x/b}]_0^b}{i\phi} = \frac{(e^{i\phi} - 1)}{i\phi}$$

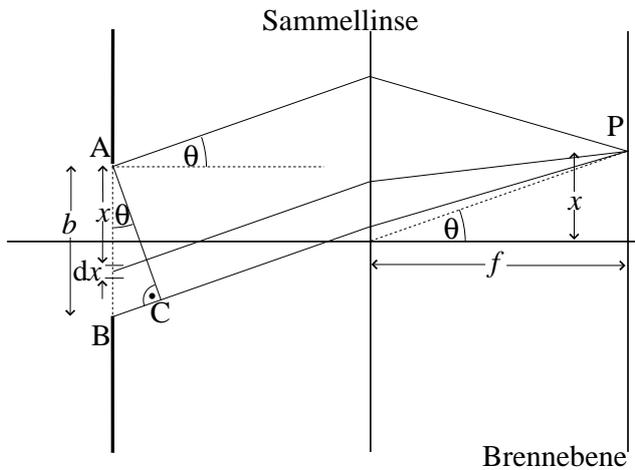


Abbildung 6.3: Zur Berechnung des Beugungsbildes eines Spalts endlicher Breite.

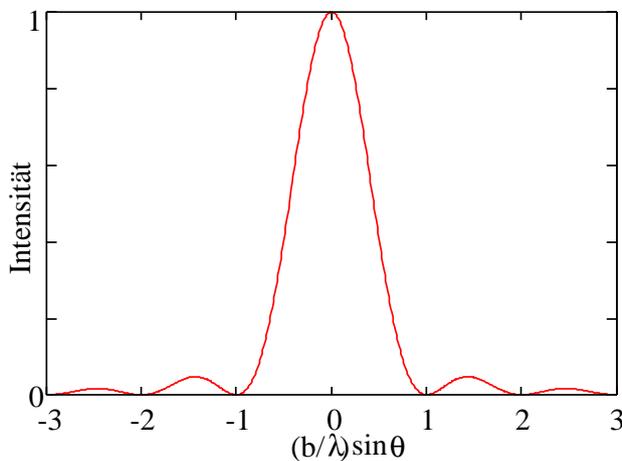


Abbildung 6.4: Intensitätsverteilung (normiert auf Maximum = 1) im Beugungsbild eines Einfachspalts der Breite b .

Die Intensität ist $I = AA^*$:

$$I = \frac{(e^{i\phi} - 1)}{i\phi} \frac{(e^{-i\phi} - 1)}{-i\phi} = \frac{2(1 - \cos \theta)}{\theta^2} = \left(\frac{\sin(\phi/2)}{\phi/2} \right)^2.$$

Wenn wir ϕ durch $(2\pi/\lambda)b \sin \theta$ ersetzen erhalten wir:

Intensitätsverteilung eines Spalts:

$$I = \left(\frac{\sin(\pi b \sin(\theta)/\lambda)}{\pi b \sin(\theta)/\lambda} \right)^2. \quad (6.3)$$

Abb. 6.4 zeigt die durch Gleichung (6.3) gegebene Intensitätsverteilung. Sie besteht aus einem Zentralen Maximum mit relativ kleinen Nebenmaxima. Die Nullstellen sind bei

$$b \sin \theta = \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots$$

Die Wirkung der Begrenzung durch den Spalt ist eine Divergenz des Strahls. Ein Maß für die Divergenz ist der Winkel bis zur ersten Nullstelle, d.h. $\pm \arcsin(\lambda/b)$. Nur knapp 10% der Gesamtintensität wird um einen größeren Winkel gebeugt. Je kleiner die Spaltbreite,

umso größer ist die Divergenz. Für eine sehr kleine Spaltbreite ($b \approx \lambda$) ist die Divergenz so groß, dass die Öffnung praktisch als eine linienförmige Huygens-Quelle betrachtet werden kann. Mit dieser Annahme wurde in den Abschnitten 6.2 und 6.3 die Beugungsbilder des Doppelspalts und des Gitters berechnet. Um eine endlich Spaltbreite zu berücksichtigen, müssen die Intensitätsverteilungen (6.1) und (6.2) mit der Funktion (6.3) moduliert werden.

Eine kreisförmige Lochblende hat natürlich ein rotationssymmetrisches Beugungsbild, das im Schnitt dem Beugungsbild eines Spalts sehr (Abb. 6.4) sehr ähnlich ist. Das erste Minimum ist bei $\sin \theta = 1,22\lambda/D$ ($D =$ Durchmesser).

6.5 Auflösungsvermögen optischer Geräte

6.5.1 Auflösungsvermögen eines Fernrohrs

Idealerweise sollte ein weit entferntes Objekt, wie z.B. ein Stern, als Punkt in der Brennebene des Objektivs eines Fernrohrs (s. Abschnitt 4.4) abgebildet werden. Aufgrund der im letzten Abschnitt besprochenen Beugungserscheinungen besteht die Abbildung jedoch aus einer Scheibe mit einem endlichen Radius. Wenn sich die Beugungsscheiben zweier Objekt erheblich überlagern, können sie nicht mehr als zwei Objekte erkannt werden, d.h. sie werden nicht mehr aufgelöst. Ein Maß für das Auflösungsvermögen eines Fernrohrs ist der Winkel α_o zwischen den Lichtstrahlen von zwei Objekten, die gerade noch aufgelöst werden. Dieser Winkel ist größenordnungsmäßig gleich dem Winkelradius der Beugungsscheibe. Da es hier nur um die Abschätzung einer Größenordnung geht, können wir den Faktor 1,22 für die Kreislochblende vernachlässigen. Außerdem sind die Winkel bei guter Auflösung notwendigerweise klein, so dass wir den Sinus durch den Winkel selbst ersetzen können. Das Auflösungsvermögen eines Fernrohrs mit einem Objektivdurchmesser D ist also λ/D :

Das Auflösungsvermögen eines Fernrohrs ist:

$$\alpha_o = \lambda/D.$$

Frage 6.3 Wie groß muss das Objektiv eines Fernrohrs sein, mit dem man eine Auflösung von 1 km auf dem Mond von der Erde aus erreichen will? (Die Entfernung des Mondes von der Erde ist rd. $3,8 \cdot 10^8$ m).

6.5.2 Auflösungsvermögen eines Mikroskops

Das Auflösungsvermögen eines Mikroskops lässt sich am besten mit Hilfe der Theorie von Abbe³ beschreiben. Wir nehmen als Beispiel für ein Objekt ein optisches Gitter (Abb. 6.5) mit dem Gitterabstand d . Wenn das Gitter mit einer parallel zur optischen Achse laufenden ebenen Welle von unten beleuchtet wird, entstehen oberhalb des Gitters gebeugte Strahlen in den Winkeln θ_n zur optischen Achse mit $\sin \theta_n = n\lambda/d$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ (s. Abschnitt 6.3). Damit das Bild Information über die Periodizität der Gitters enthält, muss mindestens der gebeugte Strahl erster Ordnung vom Objektiv erfasst werden. Die Bedingung hierfür ist $d \geq \lambda/\sin \psi$, wo $\sin \psi$ (s. Abb. 6.5) als **numerische Apertur** des Objektivs bezeichnet wird. Da sich das Objekt in der Nähe der Brennebene des Objektivs befindet, gilt näherungsweise

³Ernst Abbe (1840–1905)

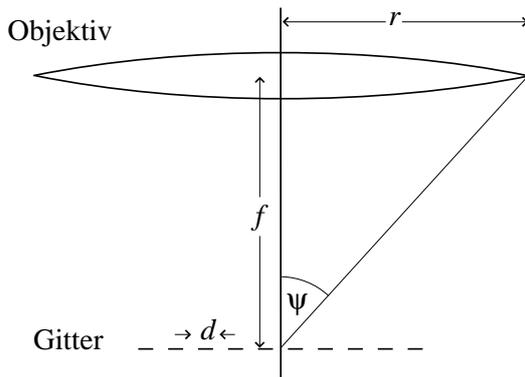


Abbildung 6.5: Zur Theorie des Auflösungsvermögens eines Mikroskops.

$\tan \psi = r/f$ ($r =$ Radius, $f =$ Brennweite des Objektivs). Der kleinste Auflösbare Abstand d_o ist daher der Linienabstand des Gitters, dessen Strahl erster Ordnung gerade noch ins Objektiv eintritt:

Auflösungsvermögen des Mikroskops:

$$d_o = \frac{\lambda}{\sin \psi}.$$

Um eine möglichst gute Auflösung zu erzielen, muss das Verhältnis (r/f) möglichst groß sein. Dies erfordert aber aufwendige Maßnahmen, um Abbildungsfehler (s. Abschnitt 3.5) zu vermeiden. Hochwertige Mikroskopobjektive sind daher teuer.

Die Wellenlänge λ stellt eine absolute Grenze für das Auflösungsvermögen des Mikroskops dar. Mit einer sog. **Immersionsojektive**, bei der das Objekt und die Objektivoberfläche in eine Flüssigkeit mit dem Brechungsindex n eingetaucht sind, wird die Auflösungsgrenze um den Faktor $1/n$ verkleinert.

6.6 Fresnel-Linsen

Wir betrachten die Intensität, die an einem Punkt B von einer Quelle am Punkt A ankommt, wenn sich zwischen A und B eine Lochblende mit dem Radius r befindet. Die Lochblende sei auf der Verbindungslinie AB zentriert, und die Entfernungen von A und B seien a bzw. b . Wir beschränken uns auf den Bereich $a, b \gg r$, dann können wir den Entfernungsfaktor in der Amplitudengleichung für Kugelwellen (s. Abschnitt 5.2) vernachlässigen. Der Amplitudenbeitrag eines Ringes mit dem Radius ρ und der Dicke e $d\rho$ ist dann proportional zur Fläche $2\pi\rho d\rho$, und die Phase ϕ relativ zum Direktstrahl ist

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\sqrt{a^2 + \rho^2} + \sqrt{b^2 + \rho^2} - a - b \right) \approx \frac{\pi\rho^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Damit erhalten wir für die Gesamtamplitude

$$A = \int_0^r 2\pi\rho \exp \left[\frac{i\pi\rho^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] d\rho = \frac{\exp \left[\frac{i\pi r^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] - 1}{\frac{i}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}. \quad (6.4)$$

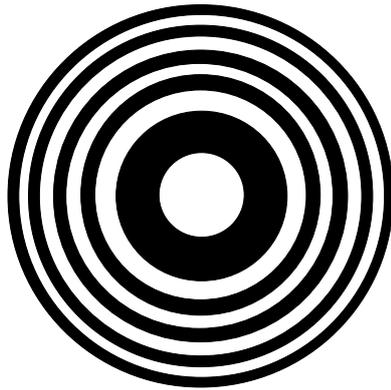


Abbildung 6.6: Fresnel-Linse.

Die Intensität ist

$$I = AA^* \sim \sin^2 \left[\frac{\pi r^2}{2\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right].$$

Dies ist eine zwischen 0 und einem festen Wert oszillierende Funktion mit Minima bei

$$r = r_n = \left(\frac{2n\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right)^{1/2}.$$

mit $n = 0, 1, 2, \dots$

Der Ring zwischen r_{n-1} und r_n wird als n te Zone bezeichnet. Aufgrund der Proportionalität zu r^2 haben alle Zonen die gleiche Fläche. Wie man durch Integration der Gleichung (6.4) leicht nachweisen kann, ist der Beitrag jeder Zone für sich zur Amplitude gleich 0, weil die innere Hälfte des Rings die andere Hälfte auslöscht. Wenn wir nun die äußeren Hälften aller Zonen abdecken, erhalten wir eine Verstärkung der Intensität am Punkt B. Aufgrund der Beziehung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2\lambda}{r_1^2}$$

funktioniert die Anordnung wie eine Linse mit der Brennweite $f = r_1^2/2\lambda$. Man spricht daher von einer Fresnel-Linse oder -Zonenplatte (Abb. 6.6).

6.7 Vielstrahlinterferenzen

6.7.1 Seifenfilm

Wenn man einen Seifenfilm oder einen auf einer Wasseroberfläche schwimmenden Ölfilm in weißem Licht betrachtet, sieht man oft farbige Reflexionen. Sie entstehen durch Interferenz zwischen den Strahlen, die von beiden Grenzflächen des Films reflektiert werden. Um dieses Phänomen zu verstehen, betrachten wir zunächst einen dünnen Seifenfilm (Dicke d , Brechungsindex n) in Luft (Brechungsindex 1), der von einem parallelen, monochromatischen Lichtstrahl (Wellenlänge λ) beleuchtet wird (Abb. 6.7).

Da die absolute Intensität des Lichtes nicht von Bedeutung ist, setzen wir die Amplitude des einfallenden Strahls gleich 1. An der ersten Grenzfläche teilt sich der Strahl (Einfallswinkel = α) in einen reflektierten Strahl (Reflexionswinkel = α) mit der Amplitude r und einem

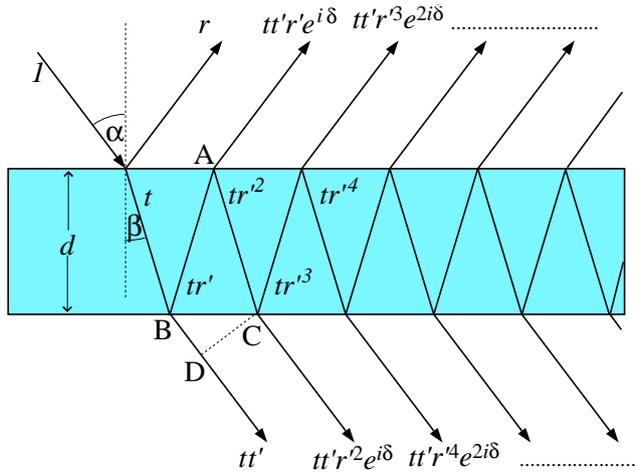


Abbildung 6.7: Interferenz durch Vielfachreflexion in einem dünnen Film.

gebrochenen Strahl (Brechungswinkel $= \beta$, $\sin \alpha = n \sin \beta$) mit der Amplitude t auf. Die Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten r und t sind vom Brechungsindex n und vom Einfallswinkel α abhängig und sind im allgemeinen verschieden von den entsprechenden Werten r' bzw. t' für einen Strahl, der vom Innern des Film auf die Grenzfläche trifft.

Der gebrochene Strahl trifft nun auf die zweite Grenze und wird mit der Amplitude tr' reflektiert und mit der Amplitude tt' gebrochen. Der reflektierte Strahl wird wieder an der oberen Grenzfläche reflektiert (Amplitude tr'^2) und gebrochen (Amplitude $tt'r'$), usw. Wir erhalten also sehr viele reflektierte Strahlen mit den Amplituden

$$r, tt'r', tt'r'^3, tt'r'^5, \dots$$

und transmittierte Strahlen mit den Amplituden

$$tt', tt'r'^2, tt'r'^4, \dots$$

Wenn wir den Film von oben oder von unten mit dem auf unendlich eingestellten Auge betrachten, werden die parallelen Strahlen auf der Netzhaut zur Interferenz gebracht. Wir müssen aber noch die Phasenunterschiede berücksichtigen.

Der optische Wegunterschied zwischen den beiden ersten transmittierten Strahlen ist

$$n(BA + AC) - BD = \frac{2nd}{\cos \beta} - 2d \tan \beta \sin \alpha = 2nd \cos \beta.$$

Der Phasenunterschied ist daher

$$\delta = \frac{4\pi nd \cos \beta}{\lambda}. \quad (6.5)$$

Aus der Geometrie des Bildes (Abb. 6.7) ist klar, dass dieser Phasenunterschied für alle benachbarten reflektierten oder transmittierten Strahlen gilt. Die reflektierten bzw. transmittierten Amplituden sind daher

$$A_r = r + tt'r' e^{i\delta} \sum_{k=0}^{\infty} (r'^2 e^{i\delta})^k \quad (6.6)$$

$$A_t = tt' \sum_{k=0}^{\infty} (r'^2 e^{i\delta})^k \quad (6.7)$$

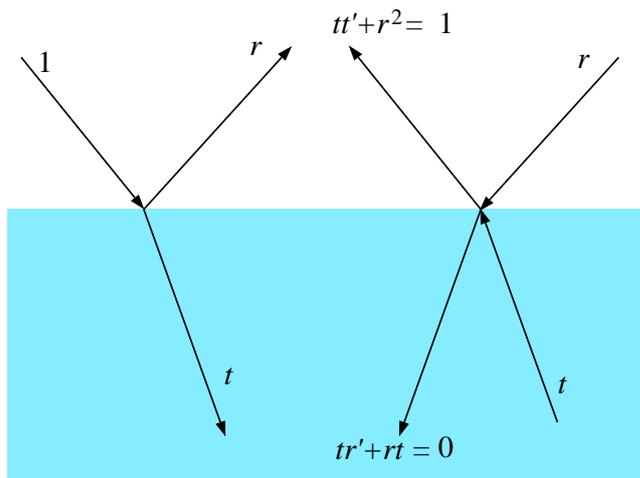


Abbildung 6.8: Zur Ableitung der Beziehungen zwischen den Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten r, t, r' und t' .

Wir können die Gleichungen (6.6) und (6.7) vereinfachen, wenn wir die Beziehungen zwischen den Größen r, t, r' und t' berücksichtigen, die durch folgende Überlegungen abgeleitet werden können: Abb. 6.8 zeigt links einen einfallenden Strahl mit der Amplitude 1, der mit der Amplitude r reflektiert und mit der Amplitude t gebrochen wird. Wir verwenden nun das Prinzip der Umkehrbarkeit der Lichtstrahlen⁴: Wenn wir sowohl den reflektierten Strahl als auch den gebrochenen Strahl umkehren, sollten sie als Ergebnis nur die Umkehrung des ursprünglich einfallenden Strahls mit der Amplitude 1 und keinen nach unten reflektierten Strahl haben. Diese Situation zeigt der rechte Teil der Abb. 6.8.

Die Amplitude des nach oben laufenden Strahls setzt sich aber aus der Reflexion des Strahls r (r^2) und der Transmission des Strahls t (tt') zusammen, d.h.

$$r^2 + tt' = 1.$$

Die Reflexion des Strahls t und die Transmission des Strahls r müssen zusammen 0 ergeben, d.h. $tr' + rt = 0$ oder

$$r = -r'.$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen erhalten wir aus (6.6) und (6.7):

$$A_r = r - r(1 - r^2)e^{i\delta} \sum_{k=0}^{\infty} (r^2 e^{i\delta})^k = \frac{r(1 - e^{i\delta})}{1 - r^2 e^{i\delta}},$$

$$A_t = (1 - r^2) \sum_{k=0}^{\infty} (r^2 e^{i\delta})^k = \frac{1 - r^2}{1 - r^2 e^{i\delta}}.$$

Die reflektierten bzw. transmittierten Intensitäten sind durch $A_r A_r^*$ bzw. $A_t A_t^*$ gegeben:

Reflexion bzw. Transmission eines dünnen Films:

$$R = \frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{1 - 2r^2 \cos \delta + r^4} = \frac{\gamma^2 \sin^2(\delta/2)}{1 + \gamma^2 \sin^2(\delta/2)} \quad (6.8)$$

$$T = \frac{(1 - r^2)^2}{1 - 2r^2 \cos \delta + r^4} = \frac{1}{1 + \gamma^2 \sin^2(\delta/2)} \quad (6.9)$$

⁴Dies gilt allerdings nur bei Abwesenheit von Absorption.

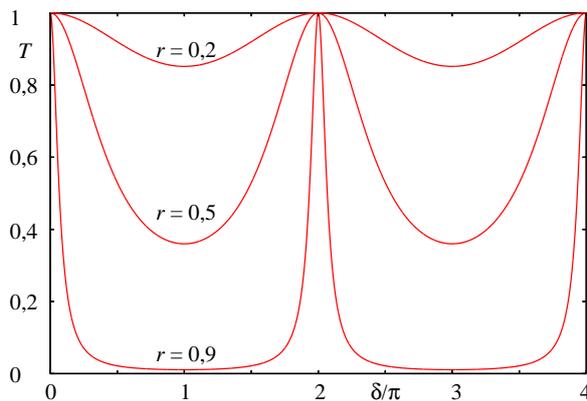


Abbildung 6.9: Transmissionskoeffizient einer dünnen Schicht nach Gleichung (6.9) für verschiedene Werte von r .

mit $\gamma = 2r/(1 - r^2)$. R und T erfüllen die Bedingung $R + T = 1$ (Energieerhaltung).

Abb. 6.9 zeigt einige nach (6.9) berechnete Werte von T für verschiedene Werte von r . Für $\delta = 2\pi, 4\pi, \dots$, d.h. $2nd \cos \beta = \lambda, 2\lambda, \dots$, ist $T = 1$, und der Film ist vollkommen transparent für die entsprechende Wellenlänge. Bei Beleuchtung mit weißem Licht in Reflexion fehlt die Wellenlänge, für die die Bedingung $T = 1$ erfüllt ist, während die anderen Farben mehr oder weniger stark reflektiert werden. Die dadurch entstehenden Farbeffekte sind sowohl von der Blickrichtung als auch von der Filmdicke abhängig.

Frage 6.4 Warum sieht man Interferenzfarben nur in *dünnen* Schichten, nicht etwa in einer Fensterscheibe?

6.7.2 Newtonsche Ringe

Die sog. Newtonschen Ringe entstehen durch Interferenz zwischen einer ebenen und einer sphärischen Glasfläche. Dies realisiert man durch Kombination einer plankonvexen Linse mit einer Glasplatte (s. Praktikumsversuch 5). Die Anordnung wird von der Linsenseite mit parallelem, monochromatischem Licht beleuchtet, und die reflektierte Intensität wird durch Projektion auf einen Schirm beobachtet.

In diesem Fall ($\beta = 0, n = 1$) folgt aus (6.5) $\delta = 4\pi d/\lambda$. Die reflektierte Intensität ist 0 (dunkle Ringe) dort, wo $\delta = 2m\pi$ bzw. $d = m\lambda/2$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) gilt. Ist s der kleinste Abstand der beiden Glasflächen, und R der Radius der sphärischen Fläche, ist die Beziehung zwischen dem Ringradius r und dem Abstand d

$$r^2 = (d - s)(2R - d) \approx 2R(d - s) \quad \text{für} \quad r \ll R.$$

Die dunklen Ringe haben daher die Radien r_m , mit

$$r_m^2 = mR\lambda - 2Rs.$$

6.7.3 Interferometer, Farbfilter

Der Intensitätsverlauf nach Gleichung (6.9) ist stark vom Wert des Reflexionskoeffizienten r abhängig (s. Abb. 6.9). Das Minimum (bei $\sin^2 \delta/2 = 1$) ist

$$T_{\min} = \left(\frac{1 - r^2}{1 + r^2} \right)^2.$$

Für $r \rightarrow 1$ geht $T_{\min} \rightarrow 0$, d.h. der Kontrast steigt mit steigendem Reflexionswert. Außerdem werden die Linien schärfer: Definieren wir die Linienbreite $\Delta\delta$ als den Abstand zwischen den Stellen, wo die Intensität auf den Mittelwert zwischen dem Maximum und dem Minimum ($\frac{1}{2}(1 + T_{\min})$) gefallen ist, erhalten wir

$$\Delta\delta = 4 \arcsin \left(\frac{1 - r^2}{\sqrt{2(1 + r^4)}} \right)$$

Tabelle 6.1 zeigt einige Werte der Halbwertsbreite relativ zum Abstand der Maxima (2π) als Funktion von r .

Tabelle 6.1: Einfluss des Reflexionskoeffizienten r auf die Breite der Hauptmaxima ($\Delta\delta/2\pi$) in der Reflexion von einem dünnen Film.

r	$\Delta\delta/2\pi$
0,10	0,494
0,50	0,344
0,95	0,033
0,99	0,006

Man kann Interferenzeffekte benutzen, um Wellenlängen zu bestimmen oder kleine Strecken mit Hilfe von Licht mit bekannter Wellenlänge zu messen. Ein Gerät, das solche Messungen ermöglicht, wird als **Interferometer** bezeichnet. Die Interferenzschicht eines Fabry-Perot Interferometers ist ein dünner Luftspalt zwischen zwei exakt parallelen Glasplatten. Die beiden inneren Glasflächen werden mit z.B. Silber oder Aluminium bedampft, um das Reflexionsvermögen zu erhöhen.

Eine Schicht, die in nur einem engen Bereich des Spektrums durchlässig ist, kann als Farbfilter benutzt werden, mit dem Licht einer gewünschten Farbe aus weißem Licht hergestellt werden kann. Brillengläser und Kameraobjektive werden mit Oberflächenschichten versehen, die Reflexionen vermindern und dadurch mehr Licht durchlassen. In diesem Fall sind Verfärbungen unerwünscht. Eine gleichmäßige Verminderung der Reflexion über das ganze Spektrum kann durch Kombination mehrerer, nacheinander aufgebrachtter Schichten erreicht werden.

6.8 Holographie

1971 erhielt Dennis Gabor (1900–1977) den Nobelpreis für Physik in Anerkennung seiner Erfindung der Holographie (in den 40er Jahren). Die Grundlage dieses Verfahrens ist die Erfassung der Phase und der Amplitude einer Welle, um sie später zu rekonstruieren.

Wenn jemand von außen durch ein Fenster in ein Zimmer hineinschaut, sieht er die darin befindlichen Objekte aufgrund der Lichtwellen, die von den Objekten ausgestrahlt werden und durch das Fenster zu seinem Auge gelangen. Die von den Objekten kommende elektromagnetische Welle (die Objektwelle) erzeugt in der Ebene des Fensters ein elektromagnetisches Feld, dessen Amplitude und Phase durch eine komplexe Funktion $\psi_O(x, y)$ beschrieben werden kann, wo x, y die Koordinaten eines Punktes in der Ebene sind. Wenn

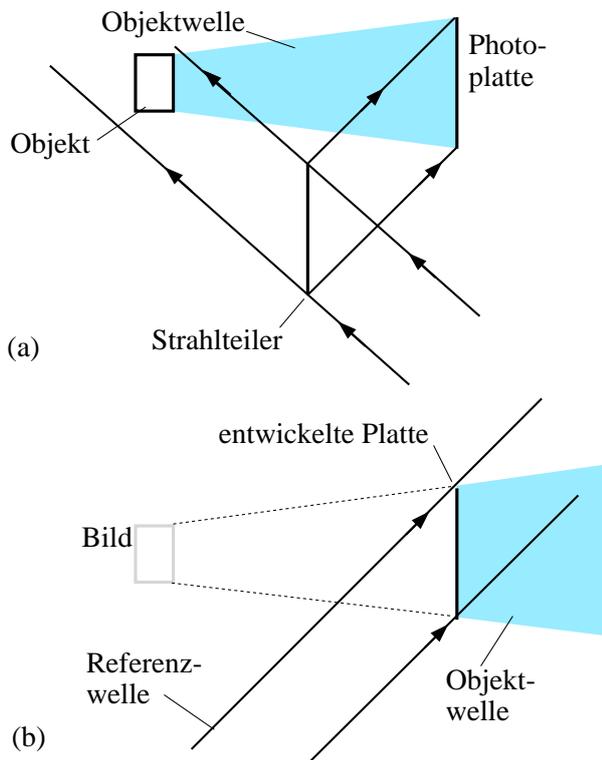


Abbildung 6.10: Das Prinzip der Holographie.
 (a) Anordnung zur Herstellung des Hologramms.
 (b) Anordnung zur Betrachtung des holographischen Bildes.

es nun gelingt, die Funktion $\psi_O(x, y)$ irgendwie festzuhalten, und zu einem späteren Zeitpunkt eine Welle zu erzeugen, die exakt die gleiche Amplituden- und Phasenverteilung in der Ebene besitzt, pflanzt sich diese Welle nach dem Prinzip von Huygens genauso fort wie die Objektwelle. Ein Beobachter, der in diese rekonstruierte Welle schaut, sieht die Objekte, als ob er durch das Fenster des Zimmers schauen würde.

In der Holographie wird die Interferenz benutzt, um die Phaseninformation zu erfassen. Das Prinzip zeigt Abb. 6.10. Das Objekt wird mit monochromatischem Licht von einem Laser (hohe Kohärenz) beleuchtet. Ein Teil des einfallenden Strahls wird als sog. Referenzwelle mittels eines halbdurchlässigen Spiegels direkt auf die Photoplatte gelenkt. Dort kommt es zu Interferenz zwischen der Objektwelle und der Referenzwelle. In der Emulsion der Photoplatte wird ein Interferenzmuster aufgezeichnet, das die Phaseninformation enthält.

Die belichtete Platte wird entwickelt und zur Rekonstruktion mit der gleichen Referenzwelle beleuchtet, die für die Aufnahme verwendet wurde. Hinter der Platte entsteht dann die Fortsetzung der Objektwelle und damit ein dreidimensionales, virtuelles Bild des Objekts. Dies lässt sich wie folgt beweisen:

Wenn wir die komplexe Amplitudenfunktion der Referenzwelle in der Ebene der Photoplatte mit $\psi_R(x, y)$ bezeichnen, ist die Gesamtamplitude während der Belichtung

$$A(x, y) = \psi_O(x, y) + \psi_R(x, y).$$

Die Photoemulsion reagiert jedoch nicht auf die Amplitude, sondern auf die Intensität

$$I(x, y) = AA^* = I_O + I_R + \psi_R^* \psi_O + \psi_R \psi_O^*.$$

Hier sind $I_O = \psi_O \psi_O^*$ und $I_R = \psi_R \psi_R^*$ die *Intensitäten* der Referenz- bzw. Objektwelle, die im allgemeinen nicht sehr stark von x und y abhängen werden und deshalb als konstant betrachtet werden können.

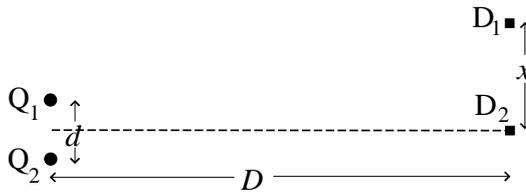


Abbildung 6.11: Interferenz mit Intensitäten?
Die Intensität von zwei inkohärenten Quellen (Q_1, Q_2) wird mit zwei Detektoren (D_1, D_2) gemessen, wobei der Abstand x zwischen den Detektoren variiert wird.

Wenn nun die belichtete Platte mit der Referenzwelle beleuchtet wird, hat man hinter der Platte die Amplitude $s(x, y)\psi_R(x, y)$, wo s die Schwärzung des Films ist. Im linearen Bereich der Schwärzungskurve gilt $s = a + bI$, wo a und b konstant sind. Kurz hinter der Platte gibt es also bei der Rekonstruktion folgende Amplitudenverteilung:

$$\psi_R[a + b(I_O + I_R + \psi_R^*\psi_O + \psi_R\psi_O^*)] = (a + bI_O + bI_R)\psi_R + bI_R\psi_O + b\psi_R^2\psi_O^*.$$

Die drei Terme auf der rechten Seite dieser Gleichung lassen sich wie folgt interpretieren:

- $(a + bI_O + bI_R)\psi_R$ ist die Amplitudenverteilung der Referenzwelle ($\psi_R(x, y)$) multipliziert mit einer Konstante $(a + bI_O + bI_R)$.
- $bI_R\psi_O$ ist die Amplitudenverteilung der Objektwelle ($\psi_O(x, y)$) multipliziert mit einer Konstante (bI_R) .
- Der Term $b\psi_R^2\psi_O^*$ ist nicht ganz so einfach zu interpretieren, man kann aber zeigen, dass es sich um eine zweite Objektwelle handelt, die aber eine andere Richtung hat und eine Abbildung an einem anderen Ort erzeugt. Durch geschickte Wahl des Einfallswinkels des Referenzstrahls kann man dafür sorgen, dass diese zweite Abbildung nicht sichtbar wird.

6.9 Interferenz mit Intensitäten?

Mit einem Trick ist es anscheinend möglich, Interferenzerscheinungen durch Messung von *Intensitäten* von *nicht kohärenten* Quellen zu beobachten. In Abb. 6.11 befinden sich zwei inkohärenten Quellen Q_1, Q_2 im Abstand d voneinander und im Abstand D von zwei Detektoren D_1, D_2 im variablen Abstand x . Jeder Detektor misst nicht die Amplitude, sondern die *Intensität* bei einer bestimmten Wellenlänge λ .

Der Phasenunterschied zwischen den Wellen, die den Detektor D_1 erreichen, sei ϕ , eine statistische Größe mit einer Kohärenzzeit τ und dem Mittelwert 0. Der Phasenunterschied zwischen den beiden Wellen, die den Detektor D_2 erreichen, ist $\phi + \psi$, mit

$$\psi \approx \frac{2\pi dx}{\lambda D}.$$

Die Näherung gilt für $D \gg d$ und $D \gg x$.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Wellen gleiche Amplitude a haben. Die von den Detektoren gemessenen Intensitäten sind

$$I_1 = 2a^2(1 + \cos \phi)$$

$$I_2 = 2a^2(1 + \cos(\phi + \psi)).$$

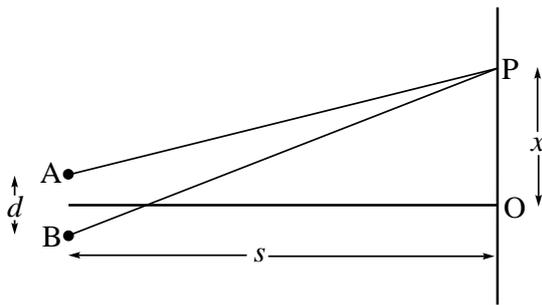


Abbildung 6.12: Zur Berechnung des Fresnel-Beugungsbildes eines Doppelspalts.

Beide haben den zeitlichen Mittelwert a^2 . Wir bilden aber das Produkt

$$I_1 I_2 = 4a^4 (1 + \cos \phi + \cos(\phi + \psi) + \cos \phi \cos(\phi + \psi)).$$

Der zeitliche Mittelwert des letzten Terms ist

$$\langle \cos \phi \cos(\phi + \psi) \rangle = \langle \cos^2 \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \phi \sin \psi \rangle = \frac{1}{2} \cos \psi.$$

Damit ist der zeitliche Mittelwert der Produkts eine periodische Funktion von x :

$$\langle I_1 I_2 \rangle = 2a^4 (2 + \cos \psi) = 2a^4 \left(2 + \cos \left[\frac{2\pi dx}{\lambda D} \right] \right).$$

Anscheinend widerspricht dieses Ergebnis der eingangs dieses Kapitels gestellten Forderung der Kohärenz. Interferenzmuster können aber auch bei inkohärenten Quellen beobachtet werden, wenn die Messzeit kleiner als die mittlere Zeit zwischen Phasensprüngen ist. Im hier diskutierten Fall darf die zeitliche Mittelung nur *nach* der Produktbildung erfolgen. Die Messwerte I_1 und I_2 müssen in einem Zeitintervall gemessen werden, das so klein ist, dass ein Phasensprung unwahrscheinlich ist. Dies gelingt kaum mit Licht, aber eher mit elektromagnetischer Strahlung im Bereich der Radiowellen. Das Verfahren wird tatsächlich in der Radioastronomie angewandt, um den Abstand von nahe beieinander liegenden Quellen zu messen.

6.10 Antworten zu den Fragen

Frage 6.1 Der Abstand des Schirms vom Doppelspalt sei s (Abb. 6.12). Wir berechnen die Intensität an einem Punkt P in einer Entfernung x von der Mittellinie O. A und B sind die Spalte im Abstand d . Der Wegunterschied zwischen den Strahlen AP und BP ist

$$\Delta = \sqrt{s^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{s^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}.$$

Die Intensität ist $I = 2a^2(1 + \cos \phi)$ mit $\phi = 2\pi \Delta / \lambda$.

Frage 6.2 $N = 590/0,6 \approx 10^3$.

Frage 6.3 Der benötigte Durchmesser ist

$$D = \lambda / \alpha_0.$$

Mit $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m und $\alpha_0 = 1/(38 \cdot 10^4)$ erhalten wir $D \approx 23$ cm.

Frage 6.4 Bei dicker werdenden Schichten geht die Kohärenz zwischen den Wellen verloren.

Kapitel 7

Polarisiertes Licht

7.1 Die Polarisationszustände des Lichtes

Nach Gleichung (5.1) ist das elektrische Feld einer in y -Richtung linear polarisierten, ebenen Welle, die sich in x -Richtung fortpflanzt, durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}E_x &= 0, \\E_y &= E \cos(\omega t - kx + \phi), \\E_z &= 0.\end{aligned}$$

Um nun die verschiedenen möglichen Polarisationszustände des Lichtes untersuchen zu können, betrachten wir die Überlagerung von zwei Wellen, die sich beide in x -Richtung bewegen, aber orthogonal zueinander linear polarisiert sind. Wir nehmen zunächst an, dass die Amplituden gleich sind, und setzen den Wert gleich 1. Ferner sollen die Wellen kohärent sein, mit dem Phasenunterschied $\Delta\phi$. Wir schreiben dann für die erste Welle:

$$\begin{aligned}E_x &= 0, \\E_y &= \cos(\omega t - kx), \\E_z &= 0.\end{aligned}$$

und für die zweite Welle:

$$\begin{aligned}E_x &= 0, \\E_y &= 0, \\E_z &= \cos(\omega t - kx + \Delta\phi),\end{aligned}$$

Wir betrachten das zeitliche Verhalten des E-Feldvektors in der Ebene $x = 0$. Der resultierende Vektor hat die Komponenten

$$E_y = \cos \omega t; \quad E_z = \cos(\omega t + \Delta\phi).$$

Wenn wir die Zeit aus diesen beiden Gleichungen eliminieren, bekommen wir eine Beziehung zwischen E_y und E_z , die die Kurve darstellt, die die Spitze des E-Vektors beschreibt:

$$E_y^2 - 2E_y E_z \cos(\Delta\phi) + E_z^2 = \sin^2 \Delta\phi.$$

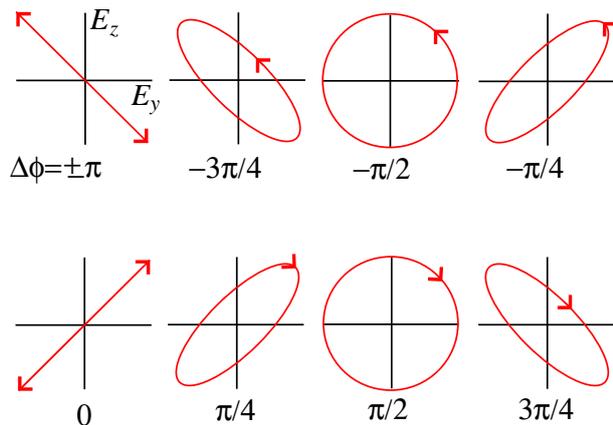


Abbildung 7.1: Die verschiedenen Polarisationszustände einer elektromagnetischen Welle, die sich durch Überlagerung von zwei linear, senkrecht zueinander polarisierten Wellen, die die gleiche Amplitude aber eine Phasendifferenz $\Delta\phi$ haben.

Wir betrachten die Lösungen für verschiedene Werte der Phasendifferenz $\Delta\phi$ (s. Abb. 7.1):

$\Delta\phi = 0$: In diesem Fall ist $E_y = E_z$, d.h. der Pfad des E-Feldvektors ist eine um 45° geneigte Gerade. Es handelt sich also um eine linear polarisierte Welle, wobei die Polarisationsene um 45° zu den x - y - bzw. x - z -Ebenen geneigt ist.

$\Delta\phi = \pm\pi$: Hier gilt $E_y = -E_z$, was wieder eine linear polarisierte Welle ergibt. Die Polarisationsene ist um 90° gegenüber dem Fall $\Delta\phi = 0$ gedreht.

$\Delta\phi = \pi/2$: Die Beziehung zwischen E_y und E_z ist in diesem Fall die Gleichung eines Kreises:

$$E_y^2 + E_z^2 = 1.$$

In jeder y - z -Ebene rotiert der E-Vektor mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Ferner gilt $E_y = \cos\omega t$ und $E_z = -\sin\omega t$, woraus zu erkennen ist, dass die Drehrichtung *links* ist, wenn man in Richtung der Wellenbewegung ($+x$) schaut. Eine solche Welle bezeichnet man als **zirkular** polarisiert. In einer Momentaufnahme sind die Spitzen der E-Vektoren spiralförmig auf einer Zylinderfläche um die x -Achse angeordnet.

$\Delta\phi = -\pi/2$: Dieser Fall entspricht ebenfalls einer zirkular polarisierten Welle, deren Drehrichtung jedoch eine *Rechtsschraube* in Fortpflanzungsrichtung bildet.

Zwischen diesen $\Delta\phi$ -Werten ist die Welle **elliptisch** polarisiert (s. Abb. 7.1), wobei die große Hauptachse der Ellipse immer um 45° zu den y - und z -Achsen geneigt ist.

Der allgemeinste Polarisationszustand ist eine Ellipse mit einer beliebig orientierten Hauptachse. Dies kann man durch Kombination von zwei orthogonalen, linear polarisierten Wellen mit unterschiedlichen Phasen *und* Amplituden erreichen:

$$\mathbf{E} = (0, E_y^\circ \cos(\omega t + \phi_y), E_z^\circ \cos(\omega t + \phi_z)).$$

Jede linear polarisierte Welle lässt sich aber als lineare Kombination von zirkular polarisierten Wellen darstellen, z.B.

$$\begin{aligned} E_r &= (0, \cos\omega t, \sin\omega t) && \text{zirkular, rechts} \\ E_l &= (0, \cos\omega t, -\sin\omega t) && \text{zirkular, links} \\ E_r + E_l &= (0, 2\cos\omega t, 0) && \text{linear, } y \\ E_r - E_l &= (0, 0, 2\sin\omega t) && \text{linear, } z. \end{aligned}$$

Jeder Polarisationszustand kann dargestellt werden als

- eine lineare Kombination von zwei senkrecht zueinander linear polarisierten Wellen, oder
- eine lineare Kombination von zwei zirkular polarisierten Wellen mit unterschiedlichen Drehrichtungen.

Frage 7.1 Was ergibt die Summe von einer rechts und einer links zirkular polarisierten Welle, wenn beide die gleiche Amplitude aber unterschiedliche Phasen haben?

Wir kennen nun linear, zirkular und elliptisch polarisiertes Licht, aber was ist „nicht polarisiertes“ Licht? Dies ist der Fall für „natürliches“ Licht, z.B. das Licht von der Sonne, von einer Glühbirne usw. Natürliches Licht besteht aus einer Mischung verschiedener Wellenlängen, aber auch wenn man eine Wellenlänge z.B. mit Hilfe eines Spektrometers herausgreift, ist der Polarisationszustand nicht eindeutig definiert. Man kann den Zustand als eine Überlagerungen von zwei senkrecht zueinander linear polarisierten Wellen, die nicht miteinander kohärent sind, auffassen. Eine Mischung aus natürlichem und polarisiertem Licht nennt man **teilverpolarisiertes** Licht.

Der nächste Abschnitt befasst sich mit den Methoden, polarisiertes Licht aus natürlichem Licht herzustellen.

7.2 Verfahren zur Herstellung polarisierten Lichts

7.2.1 Selektive Absorption

Das einfachste Verfahren, linear polarisiertes Licht herzustellen, ist die Anwendung eines Polarisationsfilters, der aus einer Folie besteht, die in einer bestimmten Ebene polarisiertes Licht absorbiert und die dazu senkrecht polarisierte Komponente durchlässt. Da die beiden Komponenten im Falle von natürlichem Licht unabhängig voneinander sind, wird die Intensität halbiert, wenn der Filter ideal arbeitet (d.h., wenn der Absorptionskoeffizient für die eine Komponente 1 und für die andere 0 ist).

Mit einer zweiten solchen Folie kann man den Polarisationszustand analysieren: Man bezeichnet die erste deshalb als **Polarisator** und die zweite als **Analysator**. Schickt man natürliches Licht durch ein Polarisator-Analysator-Paar, dessen Durchlassrichtungen um den Winkel α relativ zueinander verdreht sind, so kommt nur die Komponente durch, die parallel zur Durchlaufrichtung des Analysators ist. Der Amplitude wird daher um einen weiteren Faktor $\cos \alpha$ vermindert. Die Intensität I als Funktion der Intensität I_0 des einfallenden natürlichen Lichts ist daher

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha.$$

7.2.2 Polarisation durch Doppelbrechung

Viele Kristalle, wie z.B. Kalkspat, haben *anisotrope* optische Eigenschaften, d.h. die optischen Eigenschaften sind im allgemeinen von der Ausbreitungsrichtung und dem Polarisationszustands des Lichtstrahls abhängig. Ein Strahl, der auf einen solchen Kristall fällt

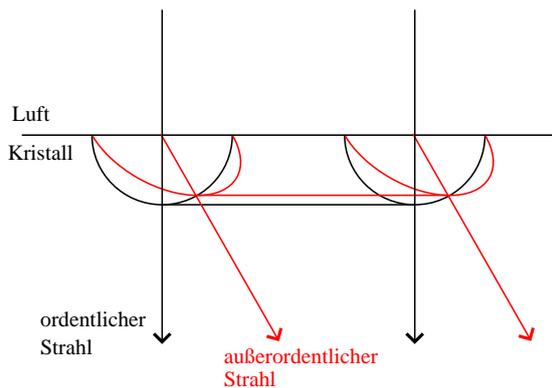


Abbildung 7.2: Doppelbrechung in einem optisch anisotropen Kristall.

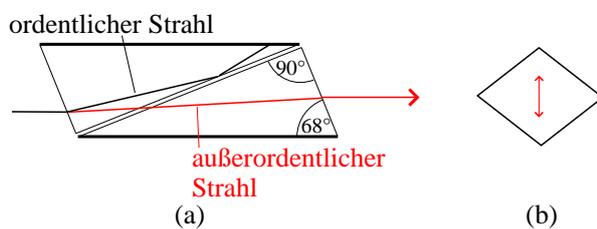


Abbildung 7.3: Das Nicol-Prisma: (a) Schnitt in der Polarisationssebene des außerordentlichen Strahls, (b) Blick in Längsrichtung.

(Abb. 7.2) spaltet sich im Kristall in zwei Strahlen auf, die senkrecht zueinander linear polarisiert sind und als **ordentlicher** und **außerordentlicher** Strahl bezeichnet werden. Der außerordentliche Strahl wird deshalb so bezeichnet, weil seine Geschwindigkeit von der Richtung abhängig ist. Die Huygens-Wellen sind daher keine Kugelflächen sondern Ellipsoide. Dies hat zur Folge, dass die Strahlrichtung nicht senkrecht zur Wellenfront ist. Der ordentliche Strahl hat eine von der Ausbreitungsrichtung unabhängige Geschwindigkeit, und die Huygens-Wellen sind Kugelwellen wie in einem isotropen Medium.

Die Tatsache, dass der ordentliche und der außerordentliche Strahl im allgemeinen unterschiedliche Ausbreitungsrichtungen innerhalb des Kristalls haben, kann man ausnutzen, um sie zu trennen und einen linear polarisierten Strahl zu erhalten. Ein Gerät, das dieses Prinzip verwendet, ist das Nicol-Prisma (Abb. 7.3). Ein länglicher Kalkspatkristall wird diagonal in zwei Teile geschnitten und mit einem durchsichtigen Kitt wieder zusammengeklebt. Der ordentliche Strahl trifft mit einem größeren Einfallswinkel auf die Schnittfläche auf als der außerordentliche Strahl. Durch geeignete Wahl des Kittmaterials wird dafür gesorgt, dass der ordentliche Strahl totalreflektiert wird, während der außerordentliche Strahl die Zwischenschicht fast ungeschwächt passiert.

7.2.3 Polarisierung durch Reflexion

Wenn ein Lichtstrahl auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes trifft, entstehen ein reflektierter Strahl und ein gebrochener Strahl. Der reflektierte Strahl wird durch die Schwingungen der Ladungen im zweiten Medium erzeugt. Diese schwingen in der zur Ausbreitungsrichtung der gebrochenen Welle senkrecht stehenden Ebene. Wird nun der Einfallswinkel so gewählt, dass der reflektierte und der gebrochene Strahl senkrecht aufeinander stehen (Abb. 7.4), hat die Ladungsbewegung keine Komponente, die in der Einfallsebene und auch senkrecht zum reflektierten Strahl steht. Der reflektierte Strahl ist daher linear senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Der kritische Einfallswinkel wird als

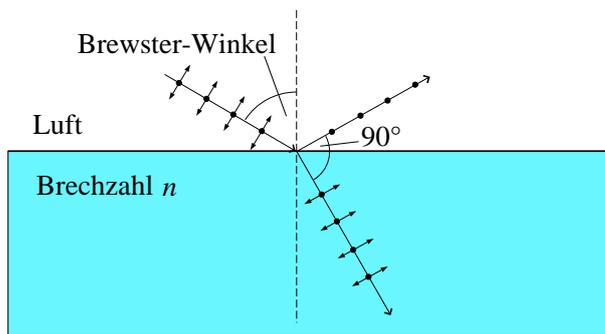


Abbildung 7.4: Polarisation durch Reflexion: Der Brewster-Winkel ist der Einfallswinkel, bei dem der reflektierte Strahl senkrecht zum gebrochenen Strahl steht. In diesem Fall ist der reflektierte Strahl 100% linear polarisiert (senkrecht zur Einfallsebene).

Brewster-Winkel (nach dem Entdecker, Sir David Brewster, 1781–1868) bezeichnet.

Handelt es sich um den Übergang von Luft zu einem Medium (z.B. Glas) mit dem Brechungsindex n , erhält man durch Anwendung der Brechungs- und Reflexionsgesetze für den Brewster-Winkel θ_B :

$$\tan \theta_B = n.$$

Frage 7.2 Wie kann man störende Reflexe in horizontalen Wasserflächen vermindern? (Sonnenbrille!)

Anmerkung: Reflexionen von einer Metalloberfläche—und damit auch von einem normalen Spiegel aus metallbeschichtetem Glas—sind *nicht* polarisiert. Aufgrund der darin enthaltenen freien Elektronen absorbieren Metalle Licht so stark, dass praktisch keine Welle eindringt, und fast die gesamte Lichtenergie reflektiert wird. Nur die Elektronen, die sich in einer dünnen Oberflächenschicht befinden, werden durch das elektrische Feld der Welle beschleunigt. Die Elektronen können daher nur parallel zur Oberfläche schwingen und strahlen daher in allen Richtungen.

7.2.4 Polarisation durch Streuung

Ein kleines Teilchen—z.B. ein Atom oder ein Molekül—befindet sich am Ursprung O eines Koordinatensystems und wird von einem nicht polarisierten Lichtstrahl getroffen, der sich in x -Richtung bewegt. Das Licht, das von dem Teilchen gestreut wird, ist—abhängig von der Streurichtung—ganz oder teilweise polarisiert, wie man durch folgende Überlegung zeigen kann:

Jede durch die einfallende Welle im Teilchen verursachte Bewegung der Ladungen liegt in der y - z -Ebene und kann daher in eine y - und eine z -Komponente aufgeteilt werden. Betrachten wir einen gestreuten Strahl, der in der x - y -Ebene liegt und einen Winkel θ mit der x -Achse bildet. In diese Richtung strahlt die z -Komponente der Ladungsbewegung unabhängig von θ aus, während der Beitrag der y -Komponente proportional zu $\cos \theta$ ist. Eine Welle, die im rechten Winkel zur einfallenden Strahl ($\theta = \pi/2$) ist deshalb vollständig linear polarisiert. Das diffuse, von einem bewölkten Himmel stammende Licht ist *nicht* polarisiert, weil es durch Mehrfachstreuung entsteht.

Frage 7.3 Bei klarem Himmel und niedrigem Sonnenstand sieht man hell-dunkle Muster in den Windschutzscheiben von Autos. Warum?

7.2.5 Zirkular polarisiertes Licht: die $\lambda/4$ -Platte

Für die Herstellung zirkular polarisierten Lichtes verwendet man wieder die Eigenschaft der Doppelbrechung. Während das Nicol-Prisma die unterschiedlichen Ausbreitungsrichtungen ausnutzt, ist hier der Geschwindigkeitsunterschied entscheidend.

Man lässt linear polarisiertes Licht auf eine Platte fallen, die aus einem doppelbrechenden Material besteht. Innerhalb der Platte gibt es zwei linear polarisierte Wellen, die sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausbreiten. Wenn die Polarisationssebene der einfallenden Welle 45° zu den beiden Polarisationssebenen des Kristalls liegt, haben die beiden Wellen gleiche Amplituden. Wenn die Dicke der Platte so gewählt wird, dass der Phasenunterschied beim Verlassen der Platte gerade $\pi/2$ beträgt, entsteht zirkular polarisiertes Licht (s. Abb. 7.1).

Ein Phasenunterschied von $\pi/2$ entspricht einem optischen Wegunterschied von einer Viertelwellenlänge. Die für die Herstellung von zirkular polarisiertem Licht vorgesehenen Platten heißen deshalb „ $\lambda/4$ -Platten“.

Wenn die Dicke der Platte nicht genau $\lambda/4$ entspricht, oder die Polarisationssebene nicht genau 45° zu den beiden Hauptebenen liegt, entsteht aus linear polarisiertem elliptisch polarisiertes Licht. Stellen wir einen Polarisator und einen Analysator so auf, dass ihre Durchlasssebenen senkrecht zueinander sind, kann kein Licht die Kombination passieren. Schieben wir aber ein doppelbrechendes Material dazwischen, wird Intensität durchgelassen, weil aus dem linear polarisierten Licht vom Polarisator elliptisch polarisiertes Licht entsteht, das zwangsläufig eine Komponente in der Durchlaufsrichtung des Analysators hat.

Unter dem Einfluss einer mechanischen Spannung wird ein sonst isotroper Stoff, wie z.B. Plexiglas, doppelbrechend. Wird ein Teil aus einem solchem Stoff zwischen gekreuzten Polarisatoren gehalten und belastet, wird die Spannungsverteilung aufgrund der durch die Doppelbrechung verursachten Helligkeitsunterschiede sichtbar. Im weißen Licht entstehen Farbeffekte, weil die Doppelbrechung auch dispersiv ist.

7.3 Optische Aktivität

Einige Substanzen besitzen die Eigenschaft, dass sie die Polarisationssebene linear polarisierten Lichtes verdrehen. Das Phänomen heißt optische Aktivität und wird sowohl in kristallinen Festkörpern (z.B. Quarz) als auch in flüssigen Lösungen (z.B. Zucker in Wasser) beobachtet. Ursache hierfür sind schraubenförmige Anordnungen von Atomgruppen in der Kristallstruktur bzw. in den Molekülen. Wenn sich Ladungen (Elektronen) in diesen Strukturen unter dem Einfluss des elektrischen Feldes der Welle bewegen, erzeugen sie wie in einer Spule ein Magnetfeld. Auch bei willkürlicher Orientierung der Moleküle wie in der Lösung hat dieses zusätzliche Feld immer eine Komponente parallel oder antiparallel zum elektrischen Feld und damit senkrecht zum Magnetfeld der Welle. Das Ergebnis ist eine Verdrehung des Magnetfeldvektors und auch des elektrischen Feldvektors, weil dieser in einer harmonischen elektromagnetischen Welle immer senkrecht zum Magnetfeldvektor ist.

Der Drehwinkel ist proportional zur Strecke, die der Lichtstrahl in der optisch aktiven Substanz zurückgelegt hat. In Lösungen ist er auch proportional zur Konzentration des aktiven Stoffes. Der Effekt kann somit z.B. zur Bestimmung des Zuckergehalts von Lösungen benutzt werden.

Optische Aktivität kann auch als Doppelbrechung von zirkular polarisierten Wellen aufgefasst werden: Wie wir schon in Abschnitt 7.1 gesehen haben, kann eine linear polarisierte Welle als lineare Kombination einer links und einer rechts zirkular polarisierten Welle dargestellt werden. Wenn sich die beiden zirkular polarisierten Komponenten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen, ändert sich ihre relative Phasenlage. Die Polarisations Ebene ist dort, wo sich die beiden sich drehenden E-Feldvektoren treffen. Wird nun die Phase der links polarisierten Welle um ϕ gegenüber der rechts polarisierten Welle verzögert, dreht sich die Polarisations Ebene um die Hälfte dieses Winkels, d.h. $\phi/2$, nach rechts (s. Frage 7.1).

7.4 Antworten zu den Fragen

Frage 7.1 Bei einer Phasenverschiebung $\Delta\phi$ lauten die Gleichungen für die rechts bzw. links zirkular polarisierte Welle:

$$\begin{aligned} E_r &= (0, \cos \omega t, \sin \omega t) \\ E_l &= (0, \cos(\omega t + \Delta\phi), -\sin(\omega t + \Delta\phi)). \end{aligned}$$

Die Summe ist

$$E_r + E_l = 2(0, \cos(\Delta\phi/2), \sin(\Delta\phi/2)) \cos(\omega t + \Delta\phi/2).$$

Dies stellt eine linear polarisierte Welle dar, wobei die Polarisationsrichtung einen Winkel $\Delta\phi/2$ mit der y -Achse bildet. Das Ergebnis der Phasenverschiebung $\Delta\phi$ ist also eine Rotation der Polarisations Ebene um den halben Betrag des Phasenwinkels.

Frage 7.2 Der Brewster-Winkel für Wasser ($n = 1,333$) ist 53° . Benutzt man einen polarisierenden Stoff als Sonnenbrille, werden Reflexe in diesem Winkelbereich weitgehend absorbiert, wenn die Durchlaufrichtung senkrecht ist.

Frage 7.3 Bei niedrigem Sonnenstand ist das vom Himmel kommende Licht stark polarisiert, weil der Streuwinkel nahe 90° ist. Um das Bruchverhalten zu beeinflussen, ist das Glas der Frontscheibe vorgespannt und aus diesem Grunde optisch anisotrop. Die ungleichmäßigen inneren Spannungen werden in polarisiertem Licht sichtbar.

Index

- Abbe, Ernst, 51
- Aberration, 19
 - chromatische, 20
 - sphärische, 19
- Absorption, 42
- Amplitude, 38
- Amplituden-Phasen-Diagramm, 41, 48
- Analysator, 65
- Auf[lösungs]vermögen, 31
- Auge, 27
 - Akkommodation, 27
- Augenfehler, 29

- Beugung, 35, 38, 45
- Beugungsbild, 47
- Bild, 13
 - reelles, 15
 - virtuelles, 15
- Bildweite, 14
- Brechungsgesetz, 10, 38
- Brechungsindex, 5, 7, 38
 - komplexer, 42
- Brennebene, 18
- Brennpunkt, 17
- Brennweite, 17
- Brewster, David, 67
- Brewster-Winkel, 67
- Brillengläser, 57

- Dioptrie, 21
- Dispersion, 11, 20
- Doppelbrechung, 65, 69
- Doppelspalt, 46

- elektrische Ladung, 35
- elektrisches Feld, 37
- Elektrodynamik, 35, 37, 38
- Eulersche Formel, 41

- Farbfehler, 20
- Farbfilter, 57
- Feldglas, 32
- Feldstecher, 32
- Fermat, Pierre de, 5
- Fermatsches Prinzip, 5, 8, 9, 13
- Fernrohr, 31
 - astronomisches, 31
 - Auf[lösungs]vermögen, 51
 - Erd-, 32
 - holländisches, 32
 - Keplersches, 31
 - Spiegel-, 32
 - Vergrößerung, 31
- Fotoapparat, 32
- Fraunhofer, Josef, 47
- Fraunhofer-Beugung, 47
- Fresnel, Augustin Jean, 47
- Fresnel-Beugung, 47
- Fresnel-Linse, 52

- Gabor, Dennis, 57
- Gitter, 47
- Gitterabstand, 48
- Gitterspektrometer, 48
 - Auf[lösungs]vermögen, 48
- Glasplatte, 10
- Grenzfläche, 13

- Holographie, 57
- Huygens Prinzip, 38, 39
- Huygens, Christiaan, 38

- Immersionsobjektive, 52
- inkohärent, 45
- Intensität, 38
- Interferenz, 35, 40
 - Bedingungen für, 45
- Interferometer, 57

- Fabry-Perot, 57
- Kalkspat, 65
- Kamera, 32
- Kameraobjektiv, 57
- Knotenpunkt, 21
- kohärent, 45
- Kohärenz, 45
- Kohärenzlänge, 46
- Kohärenzzeit, 46
- komplexe Exponentialfunktion, 41
- komplexe Zahlen, 41
- Lambda/4-Platte, 68
- Lichtleiter, 8
- Linienbreite, 57
- Linse, 13
 - dünne, 16, 17
 - – Bildkonstruktion, 18
 - dicke, 21, 28
 - – Bildkonstruktion, 21
 - – Kardinalpunkte, 28
 - Kombinationen, 21
- Linsenfehler, 19, 31
- Linsenformel, 22
- Linsengleichung, 17
- Lochblende, 38, 49, 51, 52
- Lupe, 29
- Magnetfeld, 36, 37
- Maxwell, 1
- Mikroskop, 30
 - Auflösungsvermögen, 51
- natürliches Licht, 65
- Newtonschen Ringe, 56
- Nicol-Prisma, 66
- numerische Apertur, 51
- Objekt
 - virtuelle, 16
- Objektiv
 - Mikroskop, 30
- Objektweite, 14
- Objektwelle, 57
- Öffnungsfehler, 20
- Okular
 - Mikroskop, 30
- Optik
 - geometrisch, 2
 - optische Achse, 14, 16
 - optische Aktivität, 68
 - optischer Weg, 13, 21
 - Ordnung, 48
 - Photon, 2
 - Plancksche Konstante, 2
 - Polarisation durch Streuung, 67
 - Polarisationsebene, 37
 - Polarisationsfilter, 65
 - Polarisator, 65
 - polarisiertes Licht, 63
 - zirkular, 68
 - elliptisch, 64, 68
 - linear, 63
 - zirkular, 64, 69
 - Prisma, 10
 - Quantenmechanik, 2
 - Radioastronomie, 60
 - Referenzwelle, 58
 - Reflexionsgesetz, 5
 - Reflexionskoeffizient, 54
 - Sammellinse, 17, 18, 20
 - Schärfentiefe, 33
 - schwingende Ladung, 37
 - Seifenfilm, 53
 - Snellius, 5
 - Sonnenbrille, 67
 - Spalt, 49
 - Spaltblende, 49
 - Spannung, mechanische, 68
 - Spektrometer, 11, 48
 - Spektrum, 11, 48
 - Spiegel, 9, 13, 22
 - Bildkonstruktion, 22
 - Konkav-, 22
 - Konvex-, 22
 - Teilchen, 1
 - Totalreflexion, 8
 - Transmissionskoeffizient, 54
 - Umkehrbarkeit, 7, 55
 - Vergrößerung, 19

- Lupe, 30
- Mikroskop, 30
- Vielstrahlinterferenzen, 53
- Vorzeichenregeln, 15, 16

- weißes Licht, 11
- Welle
 - ebene, 35, 36, 38
 - elektromagnetische, 1, 35
 - Fortpflanzung, 38
 - harmonische, 37
 - Kugelwelle, 35, 37, 38
 - linear polarisiert, 36
 - transversale, 35, 38
- Wellenfront, 35, 38, 40
- Wellenoptik, 2
- Wellenvektor, 36
- Wellikel, 1

- Zerstreuungslinse, 17, 19

Abbildungsverzeichnis

1.1	Laufende Welle	2
1.2	Das elektromagnetische Spektrum.	3
2.1	Reflexion und Brechung.	5
2.2	Reflexion und Brechung nach dem Fermatschen Prinzip.	6
2.3	Totalreflexion	8
2.4	Zur Verallgemeinerung des Fermatschen Prinzips.	9
2.5	Brechung durch Platte und Prisma.	10
2.6	Dispersion von Kronglas und Flintglas.	11
2.7	Prismenspektrometer.	11
3.1	Abbildung durch eine Grenzfläche.	13
3.2	Abbildung durch eine Grenze zwischen zwei Medien.	14
3.3	Abbildung durch eine eben Grenze.	15
3.4	Abbildung durch zwei Kugelflächen.	16
3.5	Sammel- und Zerstreuungslinsen	18
3.6	Konstruktion des Bildes für eine Sammellinse.	18
3.7	Konstruktion des Bildes für eine Zerstreuungslinse.	19
3.8	Sphärische und Chromatische Aberration.	20
3.9	Schräg einfallender Strahlenbündel.	20
3.10	Bildkonstruktion für eine dicke Linse.	21
3.11	Abbildung durch einen Konkavspiegel.	22
3.12	Abbildung durch einen Konvexspiegel.	22
3.13	Konstruktion des Bildes für Konkav- und Konvexspiegel	23
3.14	Zur Ableitung der Linsenformel	24
4.1	Das Auge.	27
4.2	Kardinalelemente des Auges.	28
4.3	Verlauf von Lichtstrahlen durch das Auge.	28
4.4	Zur Funktionsweise einer Lupe.	30
4.5	Das Mikroskop	31
4.6	Das astronomische Fernrohr.	32
4.7	Zur Belichtungsintensität des Films in einem Fotoapparat.	33
4.8	Die Schärfentiefe eines Kameraobjektivs.	34
5.1	Zusammenhang zwischen Strahlen und Wellenfronten.	36
5.2	E , B und k einer ebenen Welle.	36
5.3	Strahlung einer schwingenden Ladung.	37

5.4	Prinzip von Huygens: Brechungsgesetz	39
5.5	Zur Erklärung des Prinzips von Huygens.	39
5.6	Amplituden-Phasen-Diagramm.	41
6.1	Interferenz vom Doppelspalt.	46
6.2	Amplituden-Phasen-Diagramme für ein Gitter mit 4 Linien.	49
6.3	Zur Berechnung des Beugungsbildes eines Spalts endlicher Breite.	50
6.4	Beugung eines Einfachspalts.	50
6.5	Zur Theorie des Auflösungsvermögens eines Mikroskops.	52
6.6	Fresnel-Linse.	53
6.7	Interferenz durch Vielfachreflexion	54
6.8	Beziehungen zwischen den Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten.	55
6.9	Transmissionskoeffizient einer dünnen Schicht	56
6.10	Das Prinzip der Holographie.	58
6.11	Interferenz mit Intensitäten?	59
6.12	Fresnel-Beugung eines Doppelspalts	60
7.1	Die verschiedenen Polarisationszustände einer elektromagnetischen Welle.	64
7.2	Doppelbrechung in einem optisch anisotropen Kristall.	66
7.3	Das Nicol-Prisma.	66
7.4	Polarisation durch Reflexion.	67