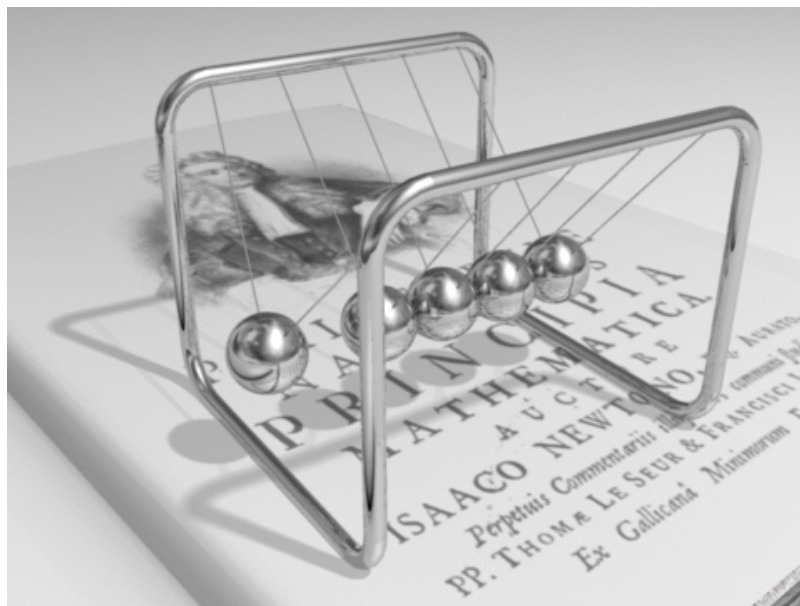


Physikalisches Grundpraktikum für Physiker/innen

Teil I

Mechanische Schwingungen



WWW-Adresse Grundpraktikum Physik: <http://grundpraktikum.physik.uni-saarland.de/>

Kontaktadressen der Praktikumsleiter:

Dr. Manfred Deicher
Zimmer: 1.11, Gebäude E 2.6
e-mail: manfred.deicher@tech-phys.uni-sb.de
Telefon: 0681/302-58198

Dr. Patrick Huber
Zimmer: 3.23, Gebäude E2.6
e-mail: p.huber@physik.uni-saarland.de
Telefon: 0681/302-3944

Mechanische Schwingungen

Stoffgebiet:

Harmonische Schwingungen

Freie und erzwungene Schwingungen
von Massepunkten und ausgedehnten Systemen

Resonanzen

Drehschwingungen

Gedämpfte Schwingungen

Schwebungen

Fragen:

1. Wie funktioniert die Wirbelstrombremse?
2. Zeichnen Sie den Frequenzgang der in der Bewegung des Pohl-Rades gespeicherten Energie. Die sich ergebende Kurve (Energiespektrum) bezeichnet man als Lorentz- oder Dispersionskurve.

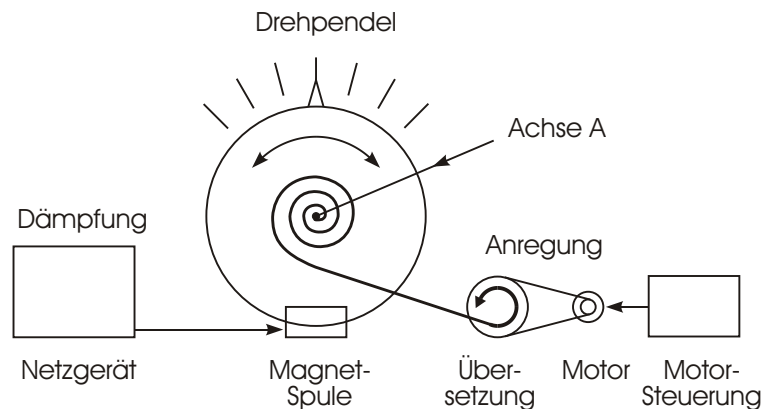
Hinweis: Die Energie läßt sich einfach berechnen, wenn man berücksichtigt, daß beim Pendel allgemein für die Zeitmittelwerte der Energie gilt:

$$\overline{\text{Gesamtenergie}}^t = 2 \cdot \overline{\text{Kinetische Energie}}^t \quad \text{und}$$

$$\text{Kinetische Energie} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\phi}^2 \quad J: \text{Trägheitsmoment}$$

3. Der Reibungsterm in der Bewegungsgleichung (1) in Teil A hat die Form $\kappa \cdot \dot{\phi}$. Wie muß bei Luftreibung dabei die Strömung beschaffen sein?
4. Was versteht man unter Schwingfall, aperiodischem Grenzfall und Kriechfall bei der gedämpften Schwingung?
5. Wieso wird die Zeigerbewegung eines analogen Meßinstrumentes normalerweise auf den aperiodischen Grenzfall eingestellt?
6. Was versteht man unter Rückkopplung? Erläutern Sie den Begriff am Beispiel der gedämpften Schwingung.
7. Läßt man auf einen schwach gedämpften Schwinger der Eigenfrequenz ω_0 eine Erregerkraft der Frequenz $\omega \approx \omega_0$ wirken, so sieht man zunächst eine Schwebung. Wie erklärt sich der Vorgang?
8. a) Wodurch zeichnen sich die Eigenschwingungen eines Systems gekoppelter Pendel bezüglich der Schwebung gegenüber allen anderen möglichen Schwingungsformen aus?
b) Wieviele Eigenschwingungen hat ein System von N gekoppelten Pendeln?
9. Nennen Sie Beispiele für gekoppelte, schwingungsfähige Gebilde aus verschiedenen Bereichen der Physik.
10. In einem System vieler gekoppelter Oszillatoren können sich Wellen ausbreiten. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenschwingungen des Systems und den im System möglichen stehenden Wellen?

Teil A: Erzwungene Schwingungen: Pohlsches Rad



Grundlagen:

Das Pohl'sche Rad ist ein Drehpendel und besteht aus einer um die Achse A drehbar gelagerten Messingscheibe, die durch eine Spiralfeder in einer stabilen Gleichgewichtslage gehalten wird. Nach einer Auslenkung ϕ_0 schwingt die Scheibe mit einer durch die Mechanik bedingten Reibung frei um diese Gleichgewichtachse und kehrt früher oder später, je nach Größe der Reibung, in diese zurück.

Mittels eines Exzentermechanismus kann zusätzlich der äußere Halterungspunkt der Spiralfeder um kleine Beträge ε verschoben werden. Damit wird es möglich, ein harmonisch mit der Zeit variierendes Drehmoment auf die Scheibe einwirken zu lassen.

Wählt man die Auslenkung ε des Spiralfederhalterungspunktes hinreichend klein, so darf das Rückstellmoment der Spiralfeder in erster Näherung als konstant angesehen werden.

Unter der Einwirkung dieses äußeren Drehmomentes vollführt das Pohl'sche Rad erzwungene Schwingungen und erlaubt eine experimentelle Untersuchung derselben.

Zum Antrieb dient ein Schrittmotor, dessen Umlauffrequenz digital geregelt wird. (Der Vorteil dieses Motors ist, daß die Frequenz in einem weiten Bereich von der Belastung unbeeinflusst bleibt, die sich in der Umgebung der Resonanz des Pohl-Rades stark ändert.)

Das Drehpendel kann unterschiedlich stark gedämpft werden, und zwar mittels einer Wirbelstrombremse. Sie funktioniert so, daß die Messingscheibe im Luftspalt eines Elektromagneten läuft, dessen Magnetfeld durch den Spulenstrom verändert werden kann.

Die Bewegungsgleichung des Pohl'schen Rades hat in komplexer Schreibweise die folgende Gestalt:

$$J\ddot{\phi} + \kappa\dot{\phi} + D_i\phi = D_a e^{i\omega t} \quad (1)$$

J : Trägheitsmoment der Messingscheibe um die Drehachse A

κ : Reibungskonstante

D_i : Direktionsmoment der Spiralfeder

D_a : Amplitude des äußeren Drehmomentes

ω : Frequenz des *äußeren* Drehmomentes

oder nach Division durch J

$$\ddot{\phi} + \rho\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = d_a e^{i\omega t} \quad (2)$$

Eine spezielle Lösung dieser inhomogenen, linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung wird mit dem folgenden Ansatz gefunden:

$$\tilde{\phi}(t) = \phi_0 e^{i(\omega t + \delta)} = \tilde{\phi}_0 e^{i\omega t} \quad (3)$$

Diese Lösung beschreibt die stationäre Schwingung, d.h. die Scheibe oszilliert mit der Frequenz ω des von außen einwirkenden Drehmomentes, allerdings mit einer Phasenverschiebung δ . Aus der Gleichung (2) und (3) erhält man

$$\tilde{\phi}_0 = \frac{d_a}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\rho} = \phi_0 e^{i\delta} \quad (4)$$

Aufgelöst nach Betrag und Phasenwinkel dieser komplexen Größe ergibt sich schließlich

$$|\tilde{\phi}_0| = \phi_0 = \frac{d_a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\rho^2}} \quad (5)$$

$$\tan \delta = \frac{-\omega\rho}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (6)$$

Die Funktion $\phi_0 = \phi_0(\omega)$ der Gleichung (5) beschreibt eine Resonanzkurve, deren Maximum bei $\omega_{\text{Res}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\rho^2}{2}}$ liegt (Skizze). Gleichung (6) gibt die Phasenverschiebung zwischen erregender und erzwungener Schwingung an.

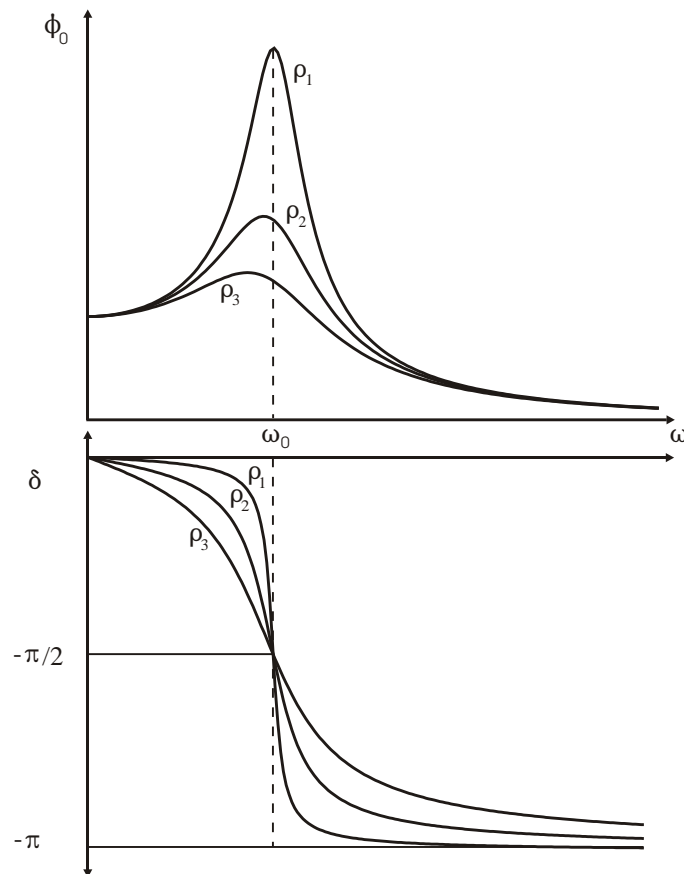


Abbildung 2: Amplituden- und Phasenverschiebungsspektrum der erzwungenen Schwingung bei unterschiedlicher Dämpfung ($\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$)

Versuchsdurchführung:

Aufgabe 1:

Man ermittle die Eigenfrequenz des ungedämpften Pohlschen Rades. Dazu messe man die Zeit für je 5 freie Schwingungen mehrmals und mittele.

Aufgabe 2:

Man ermittle die Eigenfrequenz des gedämpften Pohlschen Rades. Dazu lege man eine Spannung von 9V an die Spule der Wirbelstrombremse und verfare wie in Aufgabe 1.

Aufgabe 3:

Man nehme die Resonanzkurve des ungedämpften Drehpendels auf, indem man, bei niedriger Erregerfrequenz beginnend, die sich nach der Einschwingzeit einstellenden Amplituden des Pohlschen Rades mißt (Das Abwarten des stationären Zustandes bei jeder Erregerfrequenz ist hierbei wichtig!). Die Erregerfrequenz wird durch zweimaliges Stoppen der Zeit für je 10 Umläufe der Exzentrerscheibe ermittelt. Gleichzeitig beobachte man die Phasendifferenz δ und skizziere ihren Frequenzgang qualitativ unter der Resonanzkurve. Man zeichne die Resonanzkurve ausnahmsweise schon während der Versuchsdurchführung, um einen Überblick über die erforderliche Wahl der Erregerfrequenz zu erhalten. Die Dichte der Meßpunkte soll vernünftig gewählt werden, d.h. groß im Resonanzbereich, klein weit außerhalb.

Aufgabe 4:

Man führe Aufgabe 3 für das gedämpfte Drehpendel durch. Dazu lege man wieder eine Spannung von 9V an die Spule der Wirbelstrombremse.

Aufgabe 5:

Man prüfe, ob der Ansatz für die Dämpfung, Glg. (1), berechtigt ist. Dazu kontrolliere man, ob für das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplituden des frei schwingenden, gedämpften Rades die Beziehung gilt:

$$\frac{\phi_0(t)}{\phi_0(t+T)} = \text{const.}$$

wobei T die Schwingungsdauer ist.

Dazu trage man die aufeinanderfolgenden Maximalauslenkungen (bei eingeschalteter Dämpfung) logarithmisch gegen die Zeit auf. Wenn Glg. (1) gültig ist, ergibt sich eine Gerade. Aus ihrer Steigung sind Dämpfungskonstante und logarithmisches Dekrement zu bestimmen.

Die Dämpfungskonstante ρ ist nun in unterschiedlicher Form in Ihren Meßdaten enthalten:

- im logarithmischen Dekrement,
- in der Frequenzverschiebung des Resonanzmaximums $\omega_0 - \omega_{\text{Res}}$,
- in der Breite der gemessenen Resonanzkurve.

Berechnen Sie die daraus folgenden Werte von ρ . Versuchen Sie abzuschätzen, welcher dieser Werte der zuverlässigste und welcher der ungenaueste ist.

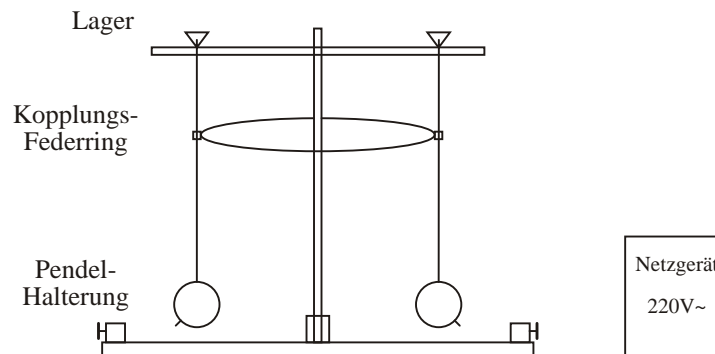
Hinweis: Wenn die Dämpfung klein ist, $\rho \ll \omega_0$, so läßt sich die Halbwertsbreite der Resonanzkurve leicht berechnen, wenn man die Näherung

$$(\omega_0^2 - \omega_H^2)^2 + \omega_H^2 \rho^2 \approx 2\omega_0^2 \left[(\omega_0^2 - \omega_H^2) + \frac{\rho^2}{2} \right]$$

verwendet. (Wie kommt man auf diese Beziehung?)

Teil B: Gekoppelte Pendel

Grundlagen:



Gegeben seien zwei gleiche, nebeneinander aufgehängte Schwerependel (Masse m , Trägheitsmoment J bezüglich der Drehachse, Abstand Schwerpunkt-Drehachse = l_0), die durch eine auf Zug und Druck gleichartig elastische Feder der Richtgröße D_f miteinander gekoppelt sind (siehe Abbildung). Lenkt man die Pendel um kleine Winkel α_1 und α_2 aus ihrer Ruhelage aus, so wirken auf jedes von ihnen zwei rücktreibende Drehmomente. Diese ergeben sich für hinreichend kleine α_i ($i = 1, 2$) zu:

$$-mg l_0 \alpha_i = -D_0 \alpha_i \quad (1)$$

(durch die Schwerkraft bedingt), sowie

$$-D_f l^2 (\alpha_2 - \alpha_1) = -D^+ (\alpha_2 - \alpha_1) \quad (2)$$

(von der Kopplung der Feder herrührend), wobei

$$D^+ = D_f l^2 \quad (3)$$

abgekürzt wurde. (Man beachte die unterschiedlichen Bedeutungen der verschiedenen D 's!) l ist der Abstand zwischen Angriffspunkt der Feder und dem Aufhängepunkt des Pendels. Aus der Bedingung der Gleichheit der Summe der rücktreibenden Momente mit der zeitlichen Änderung des Drehimpulses folgen die Bewegungsgleichungen für die gekoppelten Pendel:

$$J \ddot{\alpha}_1 = -D_0 \alpha_1 - D^+ (\alpha_1 - \alpha_2) \quad (4)$$

$$J \ddot{\alpha}_2 = -D_0 \alpha_2 - D^+ (\alpha_2 - \alpha_1) \quad (4')$$

Setzt man $\alpha_1 - \alpha_2 = \psi_1$ und $\alpha_1 + \alpha_2 = \psi_2$, so erhält man die allgemeine Lösung

$$\psi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) \quad (5)$$

$$\psi_2 = A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \quad (5')$$

mit

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{2D^+}{J} \quad (6)$$

und

$$\omega_2 = \omega_0 \quad (7)$$

wobei

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D_0}{J}} \quad (8)$$

die Eigenfrequenz des ungekoppelten Pendels bedeutet. A_1, A_2, B_1, B_2 ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Man unterscheidet folgende Fälle:

1. Bei *gleichsinniger Auslenkung* mit den Anfangsbedingungen ($t = 0$)

$$\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_0; \quad \dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0$$

ergibt sich aus (5) und (5') für die Pendelbewegung

$$\alpha_1 = \alpha_0 \cos(\omega_2 t) \quad (9)$$

$$\alpha_2 = \alpha_0 \cos(\omega_2 t) \quad (9')$$

Die Kopplung der Pendel spielt also keine Rolle. Jedes Pendel schwingt mit seiner Eigenfrequenz.

2. Bei *gegensinniger Auslenkung* mit den Anfangsbedingungen

$$\alpha_1(0) = \alpha_0; \quad \alpha_2(0) = -\alpha_0; \quad \dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0$$

erhält man aus (5) und (5')

$$\alpha_1 = \alpha_0 \cos(\omega_1 t) \quad (10)$$

$$\alpha_2 = -\alpha_0 \cos(\omega_1 t) \quad (10')$$

Hier schwingen beide Pendel mit der gleichen Frequenz ω_1 , die nach (6) größer als die Eigenfrequenz ω_0 der ungekoppelten Pendel ist.

3. Die *Schwebung* realisiert man mit den Anfangsbedingungen

$$\alpha_1(0) = \alpha_0; \quad \alpha_2(0) = 0; \quad \dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0$$

und sie wird beschrieben durch die Gleichungen

$$\alpha_1 = \alpha_0 \cos \left[\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \right] \cdot \cos \left[\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \right] \quad (11)$$

$$\alpha_2 = \alpha_0 \sin \left[\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \right] \cdot \sin \left[\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \right] \quad (11')$$

Für den Fall hinreichend kleiner Kopplung ($\frac{D^+}{J} \ll \omega_0^2$) folgt aus (6) und (7) in Näherung

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_0 \quad (12)$$

und

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{D^+}{J\omega_0} = \omega_S \quad (\text{Schwebungsfrequenz}). \quad (13)$$

Dadurch gehen die Gleichungen (11) und (11') über in:

$$\alpha_1 = \alpha_0 \cos \left(\frac{\omega_S t}{2} \right) \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (14)$$

$$\alpha_2 = \alpha_0 \sin \left(\frac{\omega_S t}{2} \right) \cdot \sin(\omega_0 t) \quad (14')$$

Wegen (13) und (3) erhält man in diesem Fall die Schwebungsfrequenz

$$\omega_S = \left(\frac{D_f}{J\omega_0} \right) l^2 = f(l^2) \quad (15)$$

Der Kopplungsgrad k beider Pendel ist definiert durch

$$k = \frac{D^+}{D_0 + D^+} \quad (16)$$

Für schwache Kopplung ergibt sich wegen (8) und (13)

$$k = \frac{\omega_S}{\omega_0 + \omega_S} \quad (17)$$

Aufgabe 1:

Man leite aus der allgemeinen Lösung (5) und (5') der Bewegungsgleichung gekoppelter Pendel die speziellen Lösungen der Fälle 1) bis 3) durch Berücksichtigung der entsprechenden Anfangsbedingungen ab. Man benutze beim Fall 3) die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen.

Aufgabe 2:

Man bestimme die Frequenzen ω_0 und ω_1 bei gleichsinniger bzw. gegensinniger Schwingung.

Messung:

$\omega_0 = \omega_2$ und ω_1 sind über je 50 Schwingungen je 5 mal zu messen. Der Angriffspunkt der Feder soll etwa bei $l_0/2$ liegen. Die Auslenkung der Pendel soll etwa $\alpha_0 = 5^\circ$ betragen. Sie soll bei beiden Pendeln möglichst gleich sein, um Schwebungen zu vermeiden.

Aufgabe 3:

Man messe die Schwebungsfrequenz ω_S (Fall 3) in Abhängigkeit von l , stelle die Funktion $f(l^2)$ graphisch dar und vergleiche deren Verlauf mit dem nach Gleichung (15) zu erwartenden. ω_S ist jeweils durch Messung über 5 Schwebungen zu bestimmen.

Aufgabe 4:

Man ermittle den Kopplungsgrad k in Abhängigkeit von l und stelle $k = k(l)$ graphisch dar.

Durchführung:

Die beiden Pendel sind schneidengelagert; sie können zur Realisierung der Anfangsbedingungen mit Kupferlitze-Drähten an den Pendelhalterungen befestigt werden. Durch einen Stromstoß aus einem Leistungs-Trafo (*Vorsicht: Primärspannung 220V!*) wird die Pendelbewegung ausgelöst. Die Schwingungs- bzw. Schwebungsdauern werden mit einer Stoppuhr gemessen. Zur Veränderung der Kopplung werden beide Halter des Federringes um gleiche Strecken verschoben.

Ergänzungsblatt zum Versuch

Mechanische Schwingungen, Drehpendel (Pohl'sches Rad) und chaotische Bewegung¹

1 Versuchsbeschreibung

Der Versuch wird — wie in der Hauptanleitung beschrieben — unter Verwendung des Pohl'schen Rades durchgeführt. Das System ist in **Abb. 1** dargestellt. Hierbei handelt es sich um ein schwingungsfähiges System, bestehend aus einer Drehscheibe und einer Spiral- oder Schneckenfeder (2c), welche für Auslenkungen aus der Ruhelage die rücktreibende Kraft erzeugt, die als Drehmoment/Rückstellmoment am Pendelkörper (2) angreift. Der metallische Pendelkörper läuft durch die Pohlschuhe eines Elektromagneten (4). Nach dem Prinzip der Wirbelstrombremse lassen sich somit durch verschiedene Ströme I_D in den Magnetspulen verschiedene Reibungskonstanten κ bzw. Dämpfungskoeffizienten ρ realisieren. Das Schwingungssystem ist wegen Lager- und Luftreibung natürlich auch bei $I_D = 0$ nicht ungedämpft (Dämpfungskoeffizient $\rho > 0$), was zu einer zeitlich nicht konstanten Amplitude führt. Änderungen zur Versuchsdurchführung ergeben sich nur durch die nunmehr *computergestützte Meßwertaufnahme* und *-auswertung*. Der Drehwinkel $\phi(t)$ wird über ein kleines Speichenrad mit eingebauter Lichtschranke in eine zu $\phi(t)$ proportionale Weglänge $x(t)$ umgewandelt, welche die Meßgröße darstellt. Zusammen mit der Zeitbasis des Computers können somit auch die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi} = \frac{d\phi(t)}{dt}$ bzw. $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ bestimmt und aufgetragen werden. Das System ist mit einem Erregermotor (5) versehen, der es erlaubt, auf das System ein zeitlich periodisches äußeres Drehmoment wirken zu lassen. Das Drehmoment wird über den Motor mit Exzentrerscheibe (3e) erzeugt und über die Schubstange (3d) und den Errerger (3) auf die Schneckenfeder übertragen.

¹Anmerkungen und Fragen zur Anleitung bitte an: sw.schmidt@mx.uni-saarland.de

1. Skalenring
2. Pendelkörper
 - (a) Zeiger für Auslenkung
 - (b) Zeiger für Phasenlage
 - (c) Schneckenfeder
3. Erreger
 - (a) Zeiger für Phasenlage
 - (b) Schlitz
 - (c) Schraube
 - (d) Schubstange
 - (e) Antriebsrad mit Exzenter
4. Elektromagnet für Wirbelstrombremse
 - (a) Anschlußbuchsen
5. Erregermotor
 - (a) Feineinstellung für Erregerspannung
 - (b) Grobeinstellung für Erregerspannung
 - (c) Meßbuchsen für Erregerspannung
 - (d) Buchsen für Versorgungsspannung

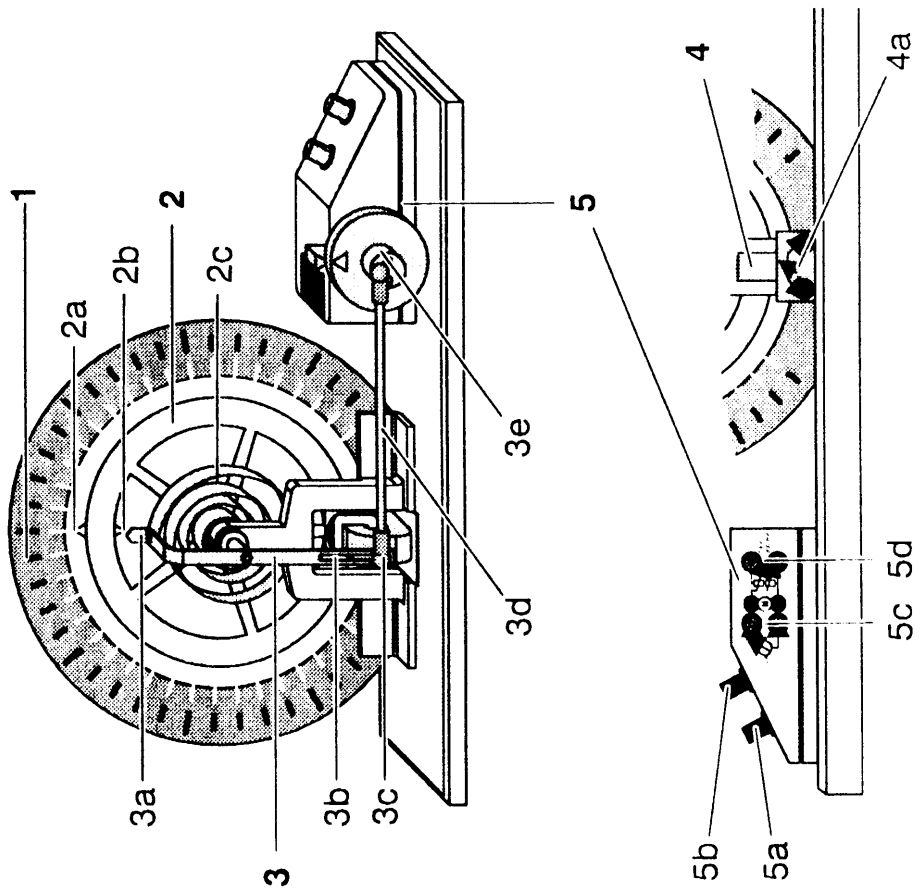


Abbildung 1: Versuchsaufbau Pohl'sches Rad

2 Versuchsdurchführung

Für das Gesamtsystem läßt sich — ähnlich der Kräftebilanz zur Beschleunigung eines Massepunktes — eine Drehmomentbilanz aufstellen. Das Drehmoment $J\ddot{\phi}(t)$, welches zur Winkelbeschleunigung $\ddot{\phi}(t)$ des Pendelkörpers führt, ergibt sich als Summe aller an ihm angreifenden Drehmomente. Diese Drehmomentbilanz:

$$\underbrace{J\ddot{\phi}(t)}_{\text{(beschleunigendes Drehmoment)}} = \underbrace{-\kappa\dot{\phi}(t)}_{\text{(dämpfendes Drehmoment)}} + \underbrace{-D_i\phi(t)}_{\text{(rückstellendes Drehmoment (Feder))}} + \underbrace{+D_a e^{i\omega t}}_{\text{(externes Drehmoment (Motor))}} \quad (1)$$

führt zur normierten Darstellung der Differentialgleichung (DGL), vgl. Teil A Gl. (2)

$$\ddot{\phi}(t) + \rho\dot{\phi}(t) + \omega_0^2\phi = d_a e^{i\omega t} \quad (2)$$

2.1 Das harmonische Drehpendel *ohne* externen Antrieb

Hierbei wird der externe Motor nicht benutzt ($d_a = 0$ in Gl.(2)). Betrachtet wird also zunächst das System mit der *linearen homogenen* DGL

$$\ddot{\phi}(t) + \rho\dot{\phi}(t) + \omega_0^2\phi(t) = 0 \quad (3)$$

Diese DGL mit konstanten Koeffizienten führt mit dem Ansatz $\phi(t) = A \cdot e^{\lambda t}$ durch Einsetzen in Gl. (3) auf die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \rho\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (4)$$

Die Lösungen $\lambda_{1,2} = -\rho/2 \pm \sqrt{\rho^2/4 - \omega_0^2}$ ergeben je nach Wert des Radikanten drei physikalisch sinnvolle Unterscheidungen:

- a) $\rho^2/4 < \omega_0^2$ (gedämpfte Schwingung)
- b) $\rho^2/4 > \omega_0^2$ (Kriechfall)
- c) $\rho^2/4 = \omega_0^2$ (aperiodischer Grenzfall)

Vorbereitungsaufgabe: Mit den Anfangsbedingungen $\phi(t=0) = \phi_0$ und $\dot{\phi}(0) = 0$ sind die Lösungen $\phi(t)$ der drei “Schwingungsmodi” herzuleiten.

Bemerkung: Die Position des ruhenden Motors ist durch Drehen des Antriebsrades so einzustellen, daß das *Drehpendel* bei 0° steht. Wegen nicht-verschwindender Lager- und Luftreibung und nicht zuletzt auch durch Energiedissipation durch den Meßaufnehmer ist eine ungedämpfte Schwingung nicht wirklich zu beobachten ($\rho > 0$), d.h. die Amplitude der Schwingung wird trotz $I_D=0$ A mit der Zeit abnehmen. Ausgehend vom “ungedämpften” harmonischen Pendel (mit Dämpfungsstrom $I_D=0$ A) lassen sich mit dem Versuchsaufbau je nach Dämpfungsstärke die drei weiteren Schwingungsmodi des nicht extern angetriebenen Drehpendels wie folgt experimentell beobachten:

2.1.1 Gedämpfte harmonische Schwingung

Hier sollen für drei verschiedene Dämpfungsstärken unterhalb des aperiodischen Grenzfalls *gedämpfte harmonische Schwingungen* erzeugt und als Meßkurve $x(t)$ aufgenommen werden (Vorschlag: $I_D = 0.3, 0.6$ und 1.0 A). Nehmen Sie die Kurven $x(t)$ mit der Cassy-Software auf. Lassen Sie sich vom Assistenten die Möglichkeiten der Kurvenanpassung (nichtlinearer 4-Parameter-Fit, least-squares fit) innerhalb des Programms zeigen, führen Sie diese für die 4-parametrische Funktion $x(t) = A \cdot e^{-B \cdot t} \sin(360 \cdot C \cdot t + D)$

durch und tragen Sie die angepaßten Parameter in die Ausdrücke ein. Machen Sie sich mit Hilfe der **Vorbereitungsaufgabe** aus Abschnitt 2.1 die Bedeutung der 4 Fitparameter ($A \dots D$) klar. Die Auswertung des logarithmischen Dekrements (Bestimmung der Dämpfungskonstanten) kann nun direkt aus den Daten ($\phi(t)$ -Kurven) erfolgen und mit dem Anpassungsparameter B der Fit-Funktion verglichen werden.

2.1.2 Aperiodischer Grenzfall

Durch weitere Erhöhung der Dämpfung im Vergleich zur gedämpften harmonischen Schwingung in 2.1.1 (Erhöhung des Stromes I_D oberhalb 1 A im Elektromagneten der Wirbelstrombremse) läßt sich der *aperiodische Grenzfall* realisieren. Hier findet gerade *keine* Schwingung mehr statt (es kann allerdings — je nach Anfangsbedingung — *ein* Unter- oder Überschwinger mit asymptotischer Annäherung an die t -Achse beobachtet werden). Ändern Sie mit Hilfe des Betreuers das Fit-Modell auf die neue Fitfunktion $x(t) = (A \cdot t + C)e^{-B \cdot t}$ und führen sie wie in 2.1.1 die Kurvenanpassung durch.

2.1.3 Kriechfall (Überdämpfung)

Oberhalb 1.5 A Dämpfungsstrom ergibt sich die Lösung der Schwingungsgleichung als einfache Exponentialfunktion *ohne* Unterschwinger, was man als *Kriechfall* oder *überdämpfte Schwingung* bezeichnet. Ändern Sie mit Hilfe des Betreuers das Fit-Modell auf diese allgemeine Lösung $x(t) = (A \cdot e^{-D \cdot t} + C \cdot e^{D \cdot t})e^{-B \cdot t}$ und führen sie wie in 2.1.1 die Kurvenanpassung durch.

2.2 Der gedämpfte harmonische Oszillator mit *periodischem* Antrieb — Resonanzphänomene

Durch Erhöhung der am Motor angelegten Gleichspannung U kann dessen Drehfrequenz und damit die Antriebsfrequenz ω für das Drehpendel geändert werden. Es ist die **Resonanzkurve** $\phi_0(\omega)$ (das heißt die Amplitude der Schwingung in Abhängigkeit von der Antriebsfrequenz ω) aufzunehmen. Hierbei ist als Dämpfungsstrom I_D zur Vermeidung zu hoher Amplituden in der Nähe der Resonanz $I_D \approx 0.3$ A zu wählen. Bei zu schwacher Dämpfung kann das Schwungrad beschädigt werden, zudem entstehen durch große Amplituden Nichtlinearitäten in der Federkraft (Abweichungen vom *Hook'schen Gesetz*)! Zur Änderung der Antriebsfrequenz des Pendels wird die Antriebsspannung des Motors verändert (die Linearität der Motorfrequenz mit der angelegten Spannung ist zu überprüfen). Um ausreichend dichte Frequenzpunkte im Bereich der Resonanzfrequenz zu erhalten, sollten für den Motor mindestens 5, 6, 7, 8 in 0.2 V Schritten, 8.5, 9.0, 10 und 11 V als Antriebsspannung gewählt werden. Es ist unbedingt darauf zu achten, daß die Bestimmung der Frequenz und der Amplitude (durch Kurvenanpassung) nach erfolgter Änderung der Antriebsfrequenz *im eingeschwungenen Zustand* (Frequenz=Antriebsfrequenz ω und zeitlich konstante Amplitude $\phi_0(\omega)$) stattfinden. Dies ist durch Beobachtung der Entwicklung des Schwingungsverlaufes *vor* der Messung über mindestens 40-50 Schwingungsperioden auf dem Bildschirm zu überprüfen. Frequenz und Amplitude können ähnlich wie in 2.1.1 über einen 4-Parameterfit $x(t) = A \cdot \sin(Bt + C) + D$ im eingeschwungenen Zustand bestimmt werden.

Aufgabe: Die **Resonanzkurve** $\phi_0(\omega)$ soll für $I_D \approx 0.3$ A aufgenommen werden. Überprüfen Sie hierbei auch die in der Anleitung hergeleitete **Phasenbeziehung** (Phasendifferenz δ) zwischen der Erregerphase (z.B. Markierung bei (3e) in Abb. 1) und der Schwingungsphase des Pendelkörpers für die drei Antriebsfälle $\omega \ll \omega_0$, $\omega \approx \omega_0$ sowie $\omega \gg \omega_0$. Passen Sie mit Hilfe des Betreuers die Parameter der in Teil A Gl. (5) angegebenen Funktion an Ihre Daten an und ermitteln Sie aus dem Fit der Resonanzkurve die Dämpfungskonstante.

Frage: Wie verhält sich das Maximum der Resonanzkurve bei Erhöhung der Dämpfung?

2.3 Demonstrationsversuch

Phasenraumdarstellung, Fixpunkte und Chaotische Schwingungen

2.3.1 Phasenraumdarstellung der Pendelbewegung im harmonischen Potential: stabiler Fixpunkt

Der Begriff des harmonischen Oszillators geht darauf zurück, daß für $\phi(t)$, der Lösung der Differentialgleichung (DGL) $J\ddot{\phi}(t) + D_i\phi(t) = 0$ für eine dämpfungsfreie Bewegung in einem *quadratischen Potential* ($E_{pot} = \frac{1}{2}D_i\phi^2$) welches aus dem *linearen Kraftgesetz* folgt, gilt: $\phi(t) \propto e^{i\omega t}$, d.h. die Lösung besteht aus Linearkombinationen von *sin* und *cos*-Funktionen. Insbesondere gilt für dieses System die Energieerhaltung, was sich durch Multiplizieren der DGL mit $\dot{\phi}$. leicht zeigen läßt: $J\dot{\phi}\ddot{\phi} + D_i\dot{\phi}\phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt} [J\dot{\phi}^2 + D_i\phi^2] = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}D_i\phi^2 = E_{rot} + E_{pot} = E_{ges} = const.$

Bisher ist die Bewegung des Drehpendels als Funktion $\phi(t)$ oder — über den Meßaufnehmer in eine Weglänge übersetzt — als Funktion $x(t)$ beschrieben worden. In einer anderen Darstellung wird die Zeit t nur noch als impliziter Parameter der Bewegung benutzt und man trägt nunmehr die Geschwindigkeit \dot{x} bzw. Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ als Funktion des Winkels ϕ bzw. Ortes x auf, während die Zeit sozusagen “im Hintergrund mitläuft”. Für eine *ungedämpfte harmonische Schwingung (ohne Antrieb)* kann man sich das Aussehen der Funktionen $\dot{\phi}(\phi)$ bzw. $\dot{x}(x)$ leicht herleiten. Die Gleichung der Energieerhaltung (zeitlich konstante Gesamtenergie) für dieses System (siehe oben), d.h. im Falle unserer Drehbewegung $E_{pot} + E_{rot} = \frac{1}{2}D_i\phi^2 + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 = E_{ges} = const.$ steht in Analogie zu $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, der Ellipsengleichung. Für den harmonischen Oszillator ohne Dämpfung ergibt sich für das Drehpendel in der Phasenraumdarstellung $\dot{\phi}(\phi)$ somit eine Ellipse mit

$$\frac{\phi^2(t)}{\frac{2E_{ges}}{D_i}} + \frac{\dot{\phi}^2(t)}{\frac{2E_{ges}}{J}} = 1 \quad . \quad (5)$$

Im Gegensatz hierzu ergibt das Vorhandensein eines nicht verschwindenden Dämpfungsterms in der DGL (hier z.B. $\propto \dot{\phi}$) für die Phasenraumtrajektorie eine Spirale, die für $t \rightarrow \infty$ auf den Punkt ($\phi = 0, \dot{\phi} = 0$) zuläuft. Ein Punkt ($\phi = 0, \dot{\phi} = 0$) in einem 2D-Phasenraum wird als Fixpunkt bezeichnet. Er ist zudem stabil, da kleine Störungen in ϕ oder $\dot{\phi}$ (z.B. Anstoßen des Pendels aus der Ruhelage) mit der Zeit verschwinden, und das System wieder auf $(0, 0)$ relaxiert.

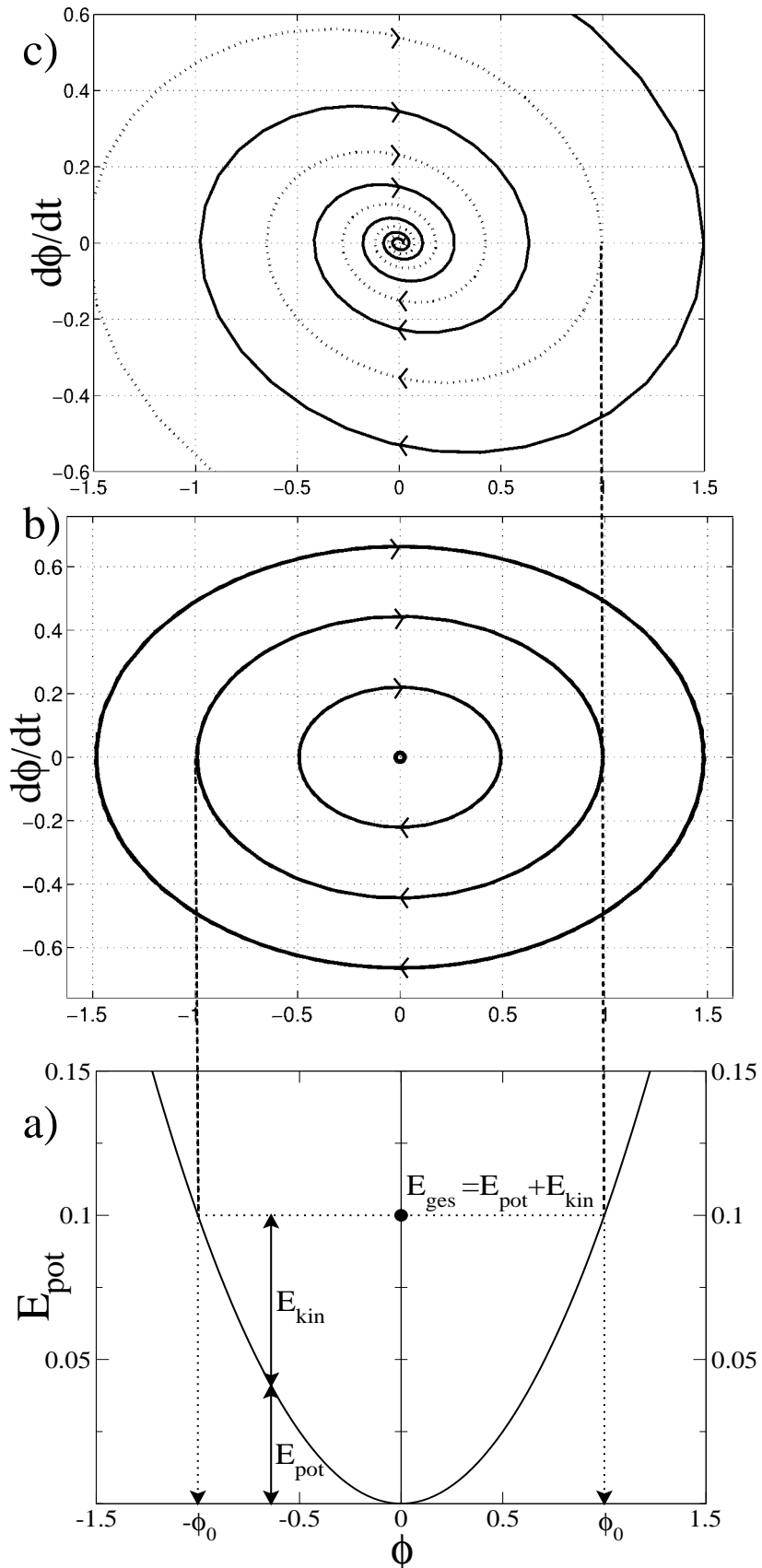


Abbildung 2: Bewegung des eindimensionalen harmonischen Oszillators: quadratisches Potential (a), Phasenraumdarstellung im ungedämpften Fall (b) (Ellipse, siehe Gl. (5), $\rho = 0$ in Gl. (2)) und im gedämpften Fall (c) $\rho > 0$

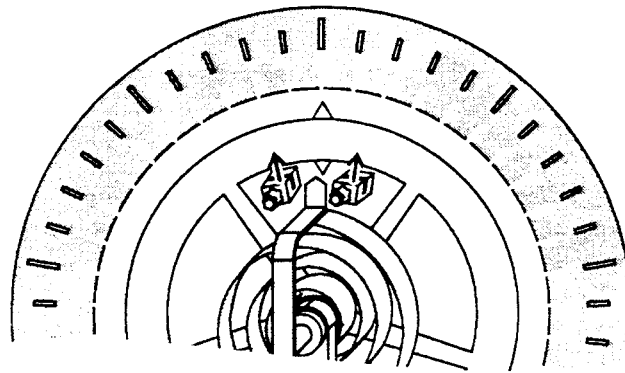


Abbildung 3: Anbringen der beiden Gewichte am Schwungrad zur Erzeugung zweier neuer Ruhelagen (siehe Doppelmuldenpotential in Abb. 4(a)).

In 2.3.2 wird ein System beschrieben, welches neben zwei stabilen auch einen instabilen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe: Lassen Sie sich vom Betreuer zeigen, wie man mit Hilfe des Programms eine Phasenraumdarstellung $\dot{\phi}(\phi)$ der Drehpendel-Bewegung der drei unter 2.1 beschriebenen Lösungen der Bewegungsgleichung erzeugt.

2.3.2 Einführung des anharmonischen Doppelmuldenpotentials: instabile Fixpunkte

Setzt man gemäß Abb. 3 zwei Gewichte an die Schwungradscheibe des Drehpendels an, so ist die Einstellung des Drehpendels bei $\phi = 0$ nicht mehr stabil, d.h. das Pendel wird entweder nach $+\phi$ oder $-\phi$ kippen und dort (bei vorhandener Dämpfung) letztlich in einen von zwei neuen, stabilen Fixpunkten des Phasenraumes bei $(+\phi_1, 0)$ oder $(-\phi_2, 0)$ spiralförmig einlaufen (siehe Abb. 4(c)). Als Modell für die potentielle Energie dieses Systems kann in guter Näherung ein Doppelmuldenpotential der Form $E_{pot} = -a\phi^2 + b\phi^4$ angenommen werden (siehe Abbildung 4).

Aufgabe: Realisieren Sie die in Abb. 4(c) numerisch simulierten Phasenraumtrajektorien für verschiedene Dämpfungsstärken!

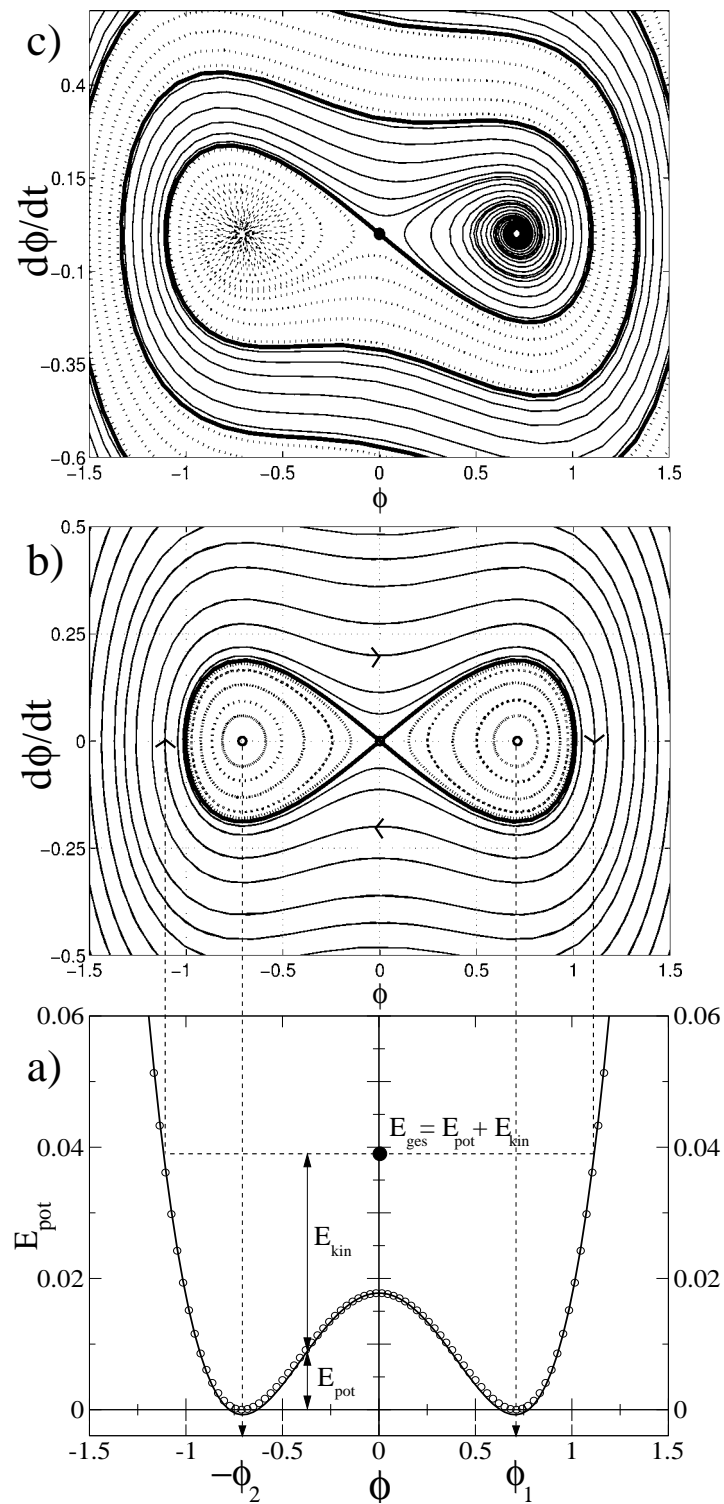


Abbildung 4: Eindimensionale Bewegung im nicht-harmonischen Potential (nach Anbringen der Zusatzgewichte gemäß Abbildung 3). **(a)** Darstellung des Doppelmuldenpotentials des Systems (offene Kreise) und Modellfit mit $E_{pot} = -a\phi^2 + b\phi^4$, $a = 0.0705$, $b = 0.0699$. **(b)** Phasenraumdarstellung mit Trajektorien im ungedämpften Fall mit **Separatrix** (breite Linie) und den stabilen Fixpunkten $((\phi_1, 0))$ und $((-\phi_2, 0))$. **(c)** Einteilung des Phasenraumes in $(\rho > 0)$ in $(\phi_1, 0)$ - oder $(-\phi_2, 0)$ -terminierte Trajektorien. Breite Linie in (c): Trennung der Einzugsbereiche der beiden stabilen Fixpunkte.

(a)	stabile, leicht anharmonische Schwingung um $(\phi_1, 0)$ oder $(-\phi_2, 0)$	$(\omega \ll \omega_c, \omega \gg \omega_c)$
(b)	Stabile Orbits mit Periodenverdopplung ggü. (a) um $(\phi_1, 0)$ oder $(-\phi_2, 0)$	$(\omega \leq \omega_c)$
(c)	chaotisches, nicht-deterministisches Verhalten	$(\omega > \omega_c)$

Tabelle 1: Die verschiedenen Schwingungsmodi des gedämpften, periodisch getriebenen Pendels im Doppelmuldenpotential

2.3.3 Gedämpftes, periodisch getriebenes Pendel im Doppelmuldenpotential

Ähnlich wie im Fall des quadratischen Potentials (Abschnitt 2.2) lassen wir nun ein periodisches externes Drehmoment (Amplitude D_a) an dem mit Gewichten versehenen Drehpendel (siehe Abb. 3) angreifen. Bei der — im Versuch fest eingestellten — konstanten Amplitude (feste Einstellung der Einstellschraube (3c) in Abb. 1) des angreifenden Drehmomentes und konstanter Reibung ($\rho > 0$, $I_D \approx 0.23A$) läßt sich das Verhalten des Drehpendels beim Durchfahren der Antriebsfrequenz ω von kleinen Werten ausgehend im wesentlichen in drei Kategorien einteilen (siehe Tabelle 1) — insbesondere läßt sich ein Übergang zu chaotischem Verhalten des Pendels oberhalb einer Frequenz ω_c beobachten: In (b) kann bei langsamer Erhöhung der Frequenz nach der Periodenverdopplung auch eine Periodenvervierfachung usw. beobachtet werden. Die (z.T. mehrfache) Verdopplung der Periode ist ein Anzeichen für den bevorstehenden Übergang der Pendelbewegung von stabilem zu chaotischem Verhalten. Nach dieser noch stabilen/deterministischen Bewegung führt eine weitere Erhöhung der Frequenz zu chaotischem Verhalten (c): es kann nicht mehr vorhergesagt werden, wann das Pendel von einem auf den anderen Attraktor wechselt. Wird die Frequenz nach Erreichen von (c) immer weiter erhöht, so führt der beschriebene “Weg ins Chaos” in umgekehrter Reihenfolge wieder vom chaotischen Verhalten über (b) zurück zur in (a) beschriebenen Situation.

Aufgabe: Präparieren Sie die Startbedingungen für das Drehpendel zu $I_D \approx 0.23A$ (Multimeter) und im Fixpunkt ($\phi = \phi_1, \dot{\phi} = 0$). Starten sie den Motor mit kleinen Frequenzen und realisieren sie die verschiedenen Situationen in Tabelle 1 wie in Abbildung 5 und bestimmen Sie ω_c .

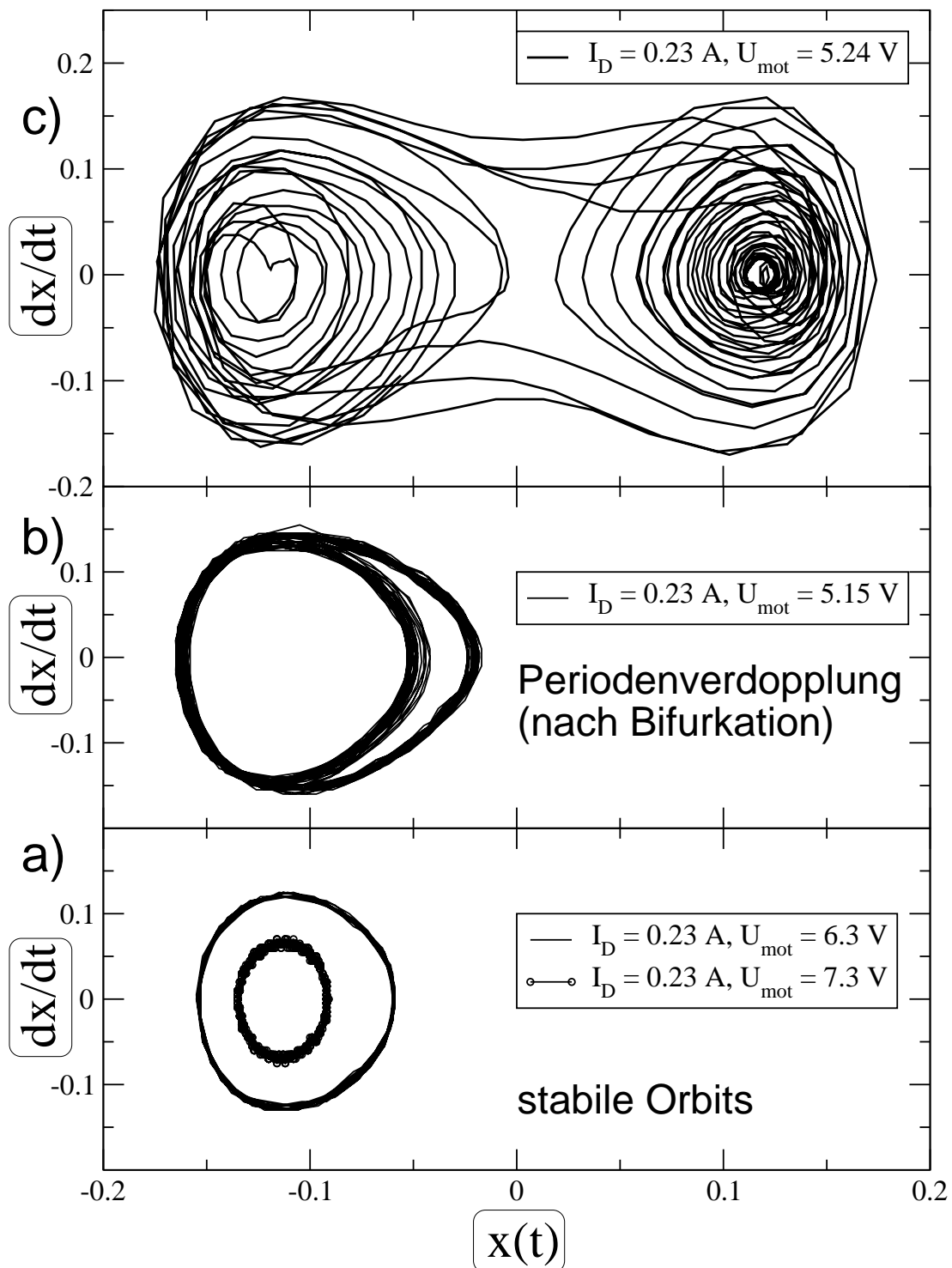


Abbildung 5: Gemessene Phasenraumdarstellung $\dot{x}(x)$ der eindimensionalen Bewegung im anharmonischen Potential mit periodischem Antrieb und Dämpfung: Übergang von stabilen Orbits mit kleinen Amplituden (in (a)) zur chaotischen Bewegung (c) über Periodenverdopplung (nach Bifurkation) in (b). Bewegung in stabilen Orbits um einen der Fixpunkte für $\omega \gg \omega_c$ (äquivalent zu $\omega \ll \omega_c$) in (a) mit harmonischer Näherung (Ellipsen) für sehr kleine Amplituden. Anm.: es wurde bei konstanter Dämpfung nur die Antriebsfrequenz ω ($\propto U_{\text{mot}}$ Motorspannung) geändert.