

Physikalisches Grundpraktikum für Physiker/innen

Teil I

Mechanischer Kreisel



WWW-Adresse Grundpraktikum Physik: <http://grundpraktikum.physik.uni-saarland.de/>

Kontaktadressen der Praktikumsleiter:

Dr. Manfred Deicher
Zimmer: 1.11, Gebäude E 2.6
e-mail: manfred.deicher@tech-phys.uni-sb.de
Telefon: 0681/302-58198

Dr. Patrick Huber
Zimmer: 3.23, Gebäude E2.6
e-mail: p.huber@physik.uni-saarland.de
Telefon: 0681/302-3944

Mechanischer Kreisel

Trägheitsmomente und einfache Bewegungen (Nutation, Präzession) des
symmetrischen Kreisels

Literatur:

Gerthsen, Kneser, Vogel: Physik

Greiner: Theoretische Physik, Mechanik, Teil 2

Bergmann, Schäfer: Experimentalphysik, Band 1: Mechanik, Akustik, Wärme
usw.

Physik-Grundpraktikum
Universität des Saarlandes

Stand SS 2002

1 Vorbemerkung

Alle mit einem „^{*}“ versehenen Aufgaben gehören zur Praktikumsvorbereitung und sind vor dem Praktikumstermin zu lösen!

2 Einleitung

Definition: Ein Kreisel ist ein starrer Körper, dessen Bewegung durch einen Fixpunkt O festgelegt ist.

Die Bewegung eines Kreisels (Kreiselung) ist meist eine verhältnismäßig komplizierte Bewegung. Daher beschränken wir uns im folgenden Versuch auf einfache Spezialfälle (symmetrischer Kreisel, entweder als freier Kreisel oder mit der Schwerkraft als einzige angreifende Kraft).

Zur Beschreibung der Kreiselbewegung verwenden wir zwei Koordinatensysteme:

- a) das Laborsystem (Inertialsystem)
- b) ein kreiselfestes Koordinatensystem, dessen Achsen entlang den Symmetriachsen des Kreisels verlaufen (beschleunigtes System).

Beide Systeme haben den Ursprung gemeinsam, dieser liegt im Fixpunkt O der Kreiselung.

Grundlage der Kreiselbewegungen sind Drehbewegungen. Diese werden daher in einem Vorspann erläutert.

3 Drehbewegungen

3.1 Lineare Bewegung - Drehbewegung

Zunächst finden Sie eine tabellarische Gegenüberstellung von linearer Bewegung und Drehbewegung. Die Bedeutung der jeweiligen Größen sollten aus der Vorlesung bekannt sein. Eventuelle Lücken sind durch Nachlesen zu schließen.

lineare Bewegung		Drehbewegung	
Masse	m	Trägheitsmoment	$\underline{\underline{\Theta}}$
Ort	\underline{r}	Winkel	φ
Geschwindigkeit	$\underline{v} = \dot{\underline{r}}$	Winkelgeschwindigkeit	$\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{e_{\omega}}$
Beschleunigung	$\underline{a} = \ddot{\underline{r}}$	Winkelbeschleunigung	$\underline{\dot{\omega}} = \ddot{\varphi} \underline{e_{\dot{\omega}}}$
Kraft	\underline{F}	Drehmoment	\underline{M}
Impuls	$\underline{p} = m \underline{v}$	Drehimpuls	$\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}} \underline{\omega}$
Bewegungsgleichung	$\underline{F} = \dot{\underline{p}} = m \underline{a}$		$\underline{M} = \dot{\underline{L}}$
Energie	$E = \frac{1}{2} m v^2$		$E = \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\underline{\Theta}} \underline{\omega}$

Hierbei ist $\underline{e_{\omega}}$ der Einheitsvektor in Richtung von $\underline{\omega}$ und $\underline{\omega}^T$ steht für den Zeilenvektor von $\underline{\omega}$.

3.2 Beispiel: Ein physikalisches Pendel

Im folgenden wird am Beispiel eines physikalischen Pendels die Bewegungsgleichung aufgestellt und gelöst und dabei die Bedeutung verschiedener Begriffe aus dem Bereich der Drehbewegungen (Schwerpunkt, Trägheitsmoment) verdeutlicht. Das Koordinatensystem ist zum Betrachtungszeitpunkt so ausgerichtet, dass die Koordinatenachsen parallel zu den Hauptträgheitsachsen des Pendels liegen.

Aufgabe 1*: Erläutern Sie den Begriff der Hauptträgheitsachsen und den damit verbundenen Begriff der Hauptträgheitsmomente!

Aufgabe 2*: Formulieren Sie den Satz von Steiner!

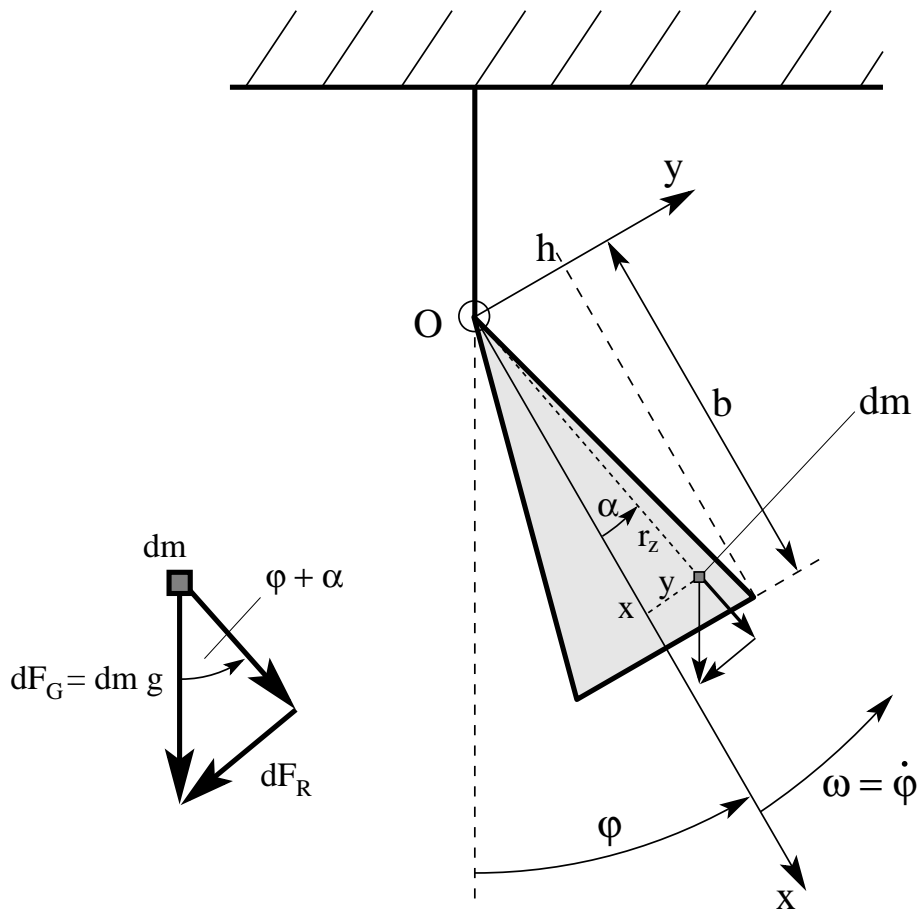


Abbildung 1: flaches, physikalisches Pendel; links, herausvergrößert: Massenelement dm mit zerlegter Gewichtskraft

Gegeben sei ein flaches, gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge $2h$ und der Höhe b (mit $h \ll b$), das, wie in Abbildung 1 dargestellt, an der Spitze drehbar aufgehängt ist. Das Pendel schwinde mit der Amplitude φ_0 .

Energie der Pendelbewegung Wir berechnen zunächst die Energie, die in der Drehbewegung des Pendels steckt. Dazu berechnen wir die kinetische Energie des Pendels beim Durchgang durch die Ruhelage ($E_{\text{pot}} = 0$). Hier gilt also:

$$E = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_m v^2 dm . \quad (1)$$

Das Massenelement dm hat dabei den Abstand $r_z = \sqrt{x^2 + y^2}$ von der Drehachse, die parallel zur z -Achse durch O verläuft, so dass es die Geschwin-

digkeit $v = \omega r_z$ besitzt, wobei ω die momentane Winkelgeschwindigkeit ist. Also gilt:

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 \int_m r_z^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \Theta_z \quad (2)$$

mit der Definition des Hauptträgheitsmomentes Θ_z , das die Eigenschaften des Pendels bei Rotation um die z-Achse beschreibt:

$$\Theta_z \stackrel{\text{def.}}{=} \int_m r_z^2 dm \quad (3)$$

Wir wandeln nun das Massenintegral in ein Flächenintegral um, wobei wir eine konstante Flächendichte ρ verwenden:

$$\rho = \frac{m}{A} = \frac{m}{bh} \Leftrightarrow m = \rho bh \quad (4)$$

mit der Fläche $A = bh$ des Pendels, oder infinitesimal formuliert:

$$dm = \rho dx dy. \quad (5)$$

Somit wird aus Gleichung (2):

$$E = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_0^b dx \int_{y^{\min}(x)}^{y^{\max}(x)} dy (x^2 + y^2), \quad (6)$$

wobei $y^{\min}(x) = -\frac{h}{b}x$ und $y^{\max}(x) = \frac{h}{b}x$ die Berandung des Pendels beschreibt. (Bei einem 3-dimensionalen Pendel erhielte man hier ein Volumenintegral.)

Damit erhält man (unter Verwendung von Gleichung (4)):

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 m \underbrace{\frac{b^2}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{h^2}{b^2} \right)}_{\Theta_z} \quad (7)$$

mit dem Hauptträgheitsmoment:

$$\Theta_z = m \frac{b^2}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{h^2}{b^2} \right). \quad (8)$$

Zur vollständigen Bestimmung der Energie brauchen wir nun noch die Winkelgeschwindigkeit ω des Pendels beim Durchgang durch die Ruhelage. Hierzu lösen wir die Bewegungsgleichung.

Bewegungsgleichung Wie in der Tabelle unter 3.1 aufgeführt, lautet die Bewegungsgleichung für eine Drehbewegung:

$$\underline{\mathbf{M}} = \underline{\dot{\mathbf{L}}} \quad (9)$$

In unserem Beispiel sind die x- und y-Komponenten von $\underline{\mathbf{M}}$ und $\underline{\mathbf{L}}$ für alle Zeiten gleich Null, so dass wir die Bewegungsgleichung auch skalar formulieren können:

$$M_z = \dot{L}_z. \quad (10)$$

Aufgabe 3*: Erläutern Sie mit einer anschaulichen Erklärung, warum!

Die Rotation des Pendels um die z-Achse beschreibt das Trägheitsmoment Θ_z . Nach der Tabelle unter 3.1 erhalten wir:

$$\dot{L}_z = \Theta_z \dot{\omega}_z. \quad (11)$$

Aufgabe 4*: Warum vereinfacht sich die Formel $\underline{\mathbf{L}} = \underline{\Theta} \underline{\omega}$ aus der Tabelle für das hier betrachtete Pendel zu: $L_z = \Theta_z \omega_z$?

Da wir das Hauptträgheitsmoment Θ_z schon bei der Bestimmung der Energie berechnet haben (Gleichung (8)), können wir nun die linke Seite der Bewegungsgleichung abhandeln und berechnen dazu das auftretende Drehmoment M_z . Jedes Massenelement dm erfährt die Gewichtskraft $d\underline{\mathbf{F}}_G = dm \underline{\mathbf{g}}$, welche gemäß $\underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{r}} \times \underline{\mathbf{F}}$ ein Drehmoment erzeugt. Wir zerlegen $d\underline{\mathbf{F}}_G$ in eine Komponente parallel und eine senkrecht zu $\underline{\mathbf{r}}$ (vgl. vergrößerter Ausschnitt in Abbildung 1, links). Die Senkrecht-Komponente dF_R stellt die Rückstellkraft des Massenelementes dm dar und ruft das Drehmoment dM_z hervor:

$$dM_z = -r_z dF_R = -r_z dm g \sin(\varphi + \alpha) \quad (12)$$

Für kleine Auslenkungen φ (harmonische Näherung) und für schmale Pendel ($h \ll b$) können wir schreiben:

$$\sin(\varphi + \alpha) \approx \varphi + \alpha \approx \varphi + \tan(\alpha) = \varphi + \frac{y}{x} \quad (13)$$

Das Gesamtdrehmoment M_z erhalten wir durch Integration über die gesamte Masse m , wobei wir wie schon bei der Energiebetrachtung das Massenintegral durch ein Flächenintegral ($dm = \rho dx dy$) sowie r_z durch $\sqrt{x^2 + y^2}$ ersetzen:

$$M_z = \int_m dM_z \quad (14)$$

$$= -g \rho \int_0^b dx \int_{y^{\min}(x)}^{y^{\max}(x)} dy \sqrt{x^2 + y^2} \left(\varphi + \frac{y}{x} \right) \quad (15)$$

$$= -g \rho \varphi \int_0^b dx \int_{-\frac{h}{b}x}^{\frac{h}{b}x} dy \sqrt{x^2 + y^2} - \underbrace{g \rho \int_0^b dx \int_{-\frac{h}{b}x}^{\frac{h}{b}x} dy \sqrt{x^2 + y^2} \frac{y}{x}}_{=0} \quad (16)$$

Der letzte Summand verschwindet, da bei der y-Integration der Integrand antisymmetrisch ist und die Grenzen des Integrals symmetrisch um Null liegen. (Dieses Argument gilt immer noch, wenn wir in obiger Herleitung α nicht durch $\tan(\alpha)$ annähern.) Daher erhalten wir:

$$M_z = -g \varphi \int_0^b \int_{-\frac{h}{b}x}^{\frac{h}{b}x} \sqrt{x^2 + y^2} \rho dx dy . \quad (17)$$

Um einen allgemeineren Ausdruck zu erhalten, ersetzen wir $r_z = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $dm = \rho dx dy$ und erweitern mit der Gesamtmasse $m = \int_m dm$:

$$M_z = -m g \varphi \underbrace{\frac{\int_m r_z dm}{\int_m dm}}_{\stackrel{\text{def}}{=} \text{Schwerpunkt, } r_s} = -m g \varphi r_s \quad (18)$$

Diese Gleichung entspricht dem mathematischen Ersatzpendel, bei dem die

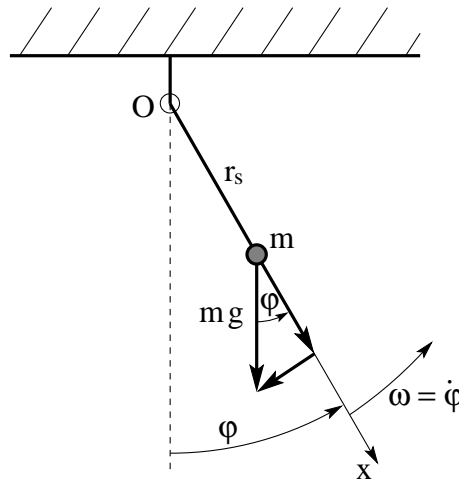


Abbildung 2: mathematisches Ersatzpendel für das flache, physikalische Pendel in Abbildung 1 mit identischem Rückstellmoment

gesamte Masse in einem Punkt, dem Schwerpunkt r_s konzentriert ist (vgl. Abbildung 2).

Für die Berechnung des Schwerpunktes erhält man in guter Näherung (Rechnung: vgl. Anhang):

$$r_s = \frac{1}{3} b \left(2 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{b^2} \right) + O \left(\left(\frac{h}{b} \right)^3 \right) \quad (19)$$

Damit erhalten für die Bewegungsgleichung — unter Berücksichtigung von $\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$:

$$-m g \varphi r_s = \Theta_z \ddot{\varphi} \quad (20)$$

Dies ist genau die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators (ohne Dämpfung und ohne äußere Krafteinwirkung) und wir erhalten als Lösung:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\hat{\omega}t + \phi) , \quad (21)$$

wobei φ_0 die Amplitude und ϕ die Phase wiedergeben (hier laufe das Pendel bei $t = 0$ durch die Ruhelage, und damit ist: $\phi = 0$) und $\hat{\omega}$ gegeben ist durch:

$$\hat{\omega} = \frac{m g r_s}{\Theta_z} \stackrel{(8),(19)}{=} \frac{2}{3} \frac{g}{b} \frac{2 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{b^2}}{1 + \frac{1}{3} \frac{h^2}{b^2}} \doteq \frac{4}{3} \frac{g}{b} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{h^2}{b^2} \right) \quad (22)$$

ACHTUNG: $\hat{\omega} = \frac{2\pi}{T}$ ist die Kreisfrequenz der Pendelbewegung und nicht die (zeitabhängige) momentane Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ des Pendels.

Damit kennen wir den Bewegungszustand des Pendels zu jedem Zeitpunkt und wir können die Winkelgeschwindigkeit beim Durchgang durch die Ruhelage ($t = 0$) bestimmen und damit die Energie der Pendelbewegung:

$$\omega(t = 0) = \dot{\varphi}(t = 0) = \hat{\omega} \varphi_0 \quad (23)$$

$$E = \frac{1}{2} \Theta_z \hat{\omega}^2 \varphi_0^2 \quad (24)$$

Anmerkung: Genaugenommen gilt die Bewegungsgleichung $\underline{M} = \underline{L}$ nur für Inertialsysteme (d.h. hier für das Laborsystem). Da sich aber in diesem Beispiel die z-Achse von Labor und Pendel nicht gegeneinander bewegen (liegen zu jedem Zeitpunkt parallel aufeinander) und außerdem nur z-Komponenten von \underline{M} und \underline{L} auftauchen, braucht keine Unterscheidung zwischen Labor- und Eigensystem des Pendels für die Bewegungsgleichung vorgenommen zu werden.

3.3 Allgemeine Form des Trägheitstensors

Für die folgenden Gleichungen gilt die Summenkonvention, d.h. über alle Indizes, die in einem Produkt doppelt auftauchen wird summiert.

Trägheitsmoment, $\underline{\underline{\Theta}}$: Tensor 2. Stufe mit:

$$\Theta_{ij} = \int_m dm (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{jm} \delta_{in}) r_j r_n . \quad (25)$$

Also haben die Diagonalelemente die Form:

$$\Theta_{ii} = \int_m dm \sum_{j \neq i} r_j^2 \quad (26)$$

und die Nicht-Diagonalelemente ($i \neq j$):

$$\Theta_{ij} = - \int_m dm r_i r_j . \quad (27)$$

Wählt man die Koordinatenachsen parallel zu den Hauptachsen des Kreisel, so verschwinden die Nicht-Diagonalelemente und der Trägheitstensor $\underline{\underline{\Theta}}$ hat Diagonalform mit den Hauptträgheitsmomenten Θ_x , Θ_y , Θ_z als Diagonaleinträge. Da sich aber das Laborkoordinatensystem und das kreiselfeste Koordinatensystem gegeneinander drehen, ist der Trägheitstensor im Laborsystem i.a. zeitlich nicht konstant und hat daher i.a. im Laborsystem keine Diagonalform.

4 Versuch A: Bestimmung der Trägheitsmomente des verwendeten Kreisels

Als Grundlage der Auswertung in diesem Versuchsteil dient das Beispiel des physikalischen Pendels aus Abschnitt 3.2.

Der in diesem Versuch verwendete Kreisel ist symmetrisch, d.h.:

$$\Theta_x = \Theta_y \stackrel{\text{def.}}{=} \Theta_{xy} \neq \Theta_z . \quad (28)$$

Er hat die Form einer Fahrradfelge, wie in Abbildung 3 schematisch dargestellt.

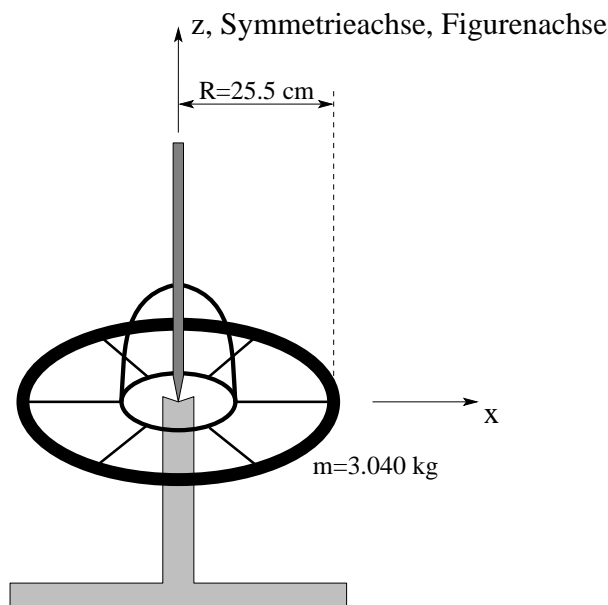


Abbildung 3: schematische Darstellung des hier verwendeten symmetrischen Kreisels

Aufgabe 5*: Begründen Sie ohne Rechnung, warum $\Theta_z > \Theta_{xy}$!

Aufgabe 6*: Schätzen Sie das axiale (Θ_z) und das äquatoriale Trägheitsmoment (Θ_{xy}) des Kreisels ab!

Hilfe für das Abschätzen von Θ_{xy} :

a) aus Abbildung 4 erhält man:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}$$

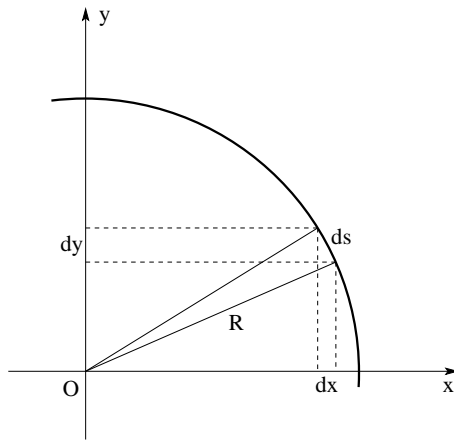


Abbildung 4: Hilfszeichnung zum Abschätzen von Θ_{xy}

b)

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{\frac{1}{a^2 - x^2}} dx = \left[-\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^1$$

Aufgabe 7: Bestimmen Sie experimentell das Hauptträgheitsmoment Θ_z !

1) Befestigen Sie den Kreisel so in dem dafür vorgesehenen Gestell, dass die z-Achse horizontal verläuft. Fixieren Sie mit Klebeband die Zusatzmasse $m' = 200$ g, wie in Abbildung 5 a) dargestellt, am Innenrand der Felge und ermitteln Sie die Periodendauer T des so entstandenen physikalischen Pendels! Beachten Sie hierbei, dass die Schwingungsamplitude hinreichend klein bleiben muss, damit die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ ihre Gültigkeit behält.

2) Messen Sie zum Vergleich die Periodendauer T , für große Schwingungsamplituden ($\approx 80^\circ$)!

3) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und leiten Sie hieraus den Zusammenhang zwischen Θ_z und T ab!

Hilfe:

a) Das Gesamtträgheitsmoment setzt sich zusammen aus dem Trägheitsmoment des Kreisels (Θ_z) und dem der Masse m' , welche hierfür als punktförmig angesehen werden darf. Verwenden Sie den Satz von Steiner.

b) Das Gesamtdrehmoment setzt sich zusammen aus dem Drehmoment, das durch die Gewichtskraft des Kreisels verursacht wird (Symmetrie beachten!) und dem Drehmoment, das aus der Gewichtskraft von m' resultiert.

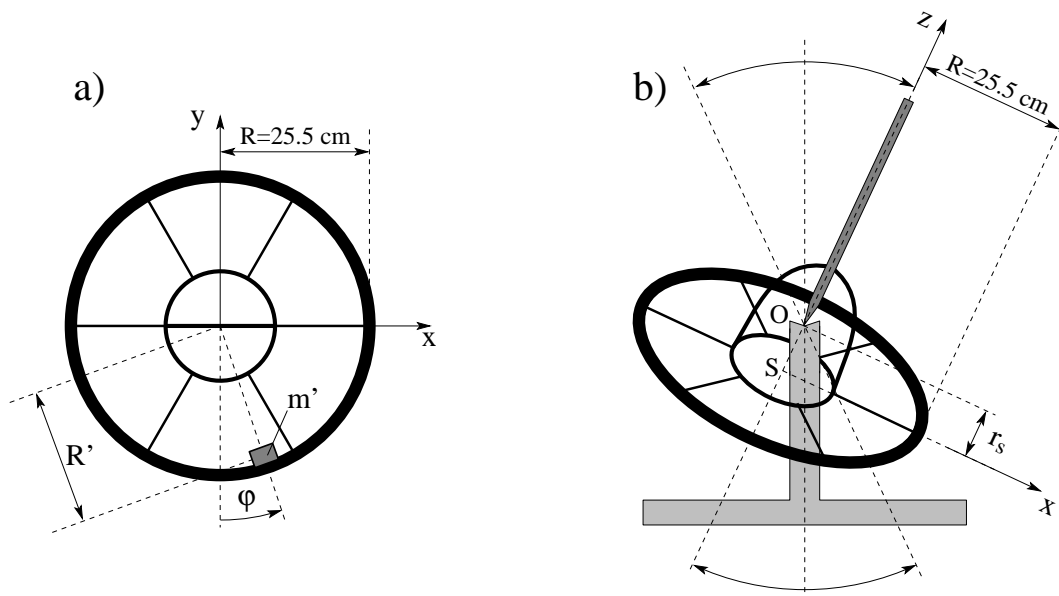


Abbildung 5: Aufbau zur Bestimmung von a) Θ_z und b) von Θ_{xy}

4) Vergleichen Sie das Messergebnis mit dem Schätzwert! Geht die Abweichung in die vermutete Richtung?

Aufgabe 8: Bestimmen Sie experimentell das Hauptträgheitsmoment Θ_{xy} !

1) Verschieben Sie, wie in Abbildung 5 b) dargestellt, die z-Achse des Kreisels um die Strecke r_s nach oben und stellen Sie den Kreisel mit der z-Achse vertikal ausgerichtet auf den Fuß. Der Kreisel wird durch den Stativfuß jetzt um die Strecke r_s oberhalb seines Schwerpunktes unterstützt (stabiles Gleichgewicht). Neigt man die z-Achse nun um einen kleinen Winkel aus der Vertikalen heraus, und läßt los, so bildet auch dieses System ein physikalisches Pendel. Bestimmen Sie aus der Periodendauer dieser Pendelbewegung analog zum Fall Θ_z das Hauptträgheitsmoment Θ_{xy} und vergleichen Sie es mit dem Schätzwert!

5 Freier Kreisel

5.1 Allgemeines

Definition: Ein freier Kreisel ist ein Kreisel, an dem das angreifende resultierende Drehmoment verschwindet (und damit auch die angreifende resultierende Kraft) .

Damit gilt:

$$\underline{M}_{\text{Labor}} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\dot{L}} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{L} = \underline{\Theta} \underline{\omega} = \text{konst.} \quad (29)$$

$$\underline{\dot{E}} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\Theta} \underline{\omega} = \text{konst.} \quad (30)$$

Da also der Drehimpuls \underline{L} eine Konstante der Bewegung ist können wir o.B.d.A. unser Laborsystem so legen, dass \underline{L} parallel zur Labor-z-Achse liegt. Weiterhin gibt Gleichung (30) eine Randbedingung für $\underline{\omega}$ bei vorgegebenen $\underline{\Theta}$ (durch Kreisel gegeben):

$$2E = \Theta_{xx}\omega_x^2 + \Theta_{yy}\omega_y^2 + \Theta_{zz}\omega_z^2 + 2\Theta_{xy}\omega_x\omega_y + 2\Theta_{xz}\omega_x\omega_z + 2\Theta_{yz}\omega_y\omega_z \quad (31)$$

Gleichung (31) beschreibt eine 3-dimensionale Ellipse (Poinsot-Ellipsoid) im $\underline{\omega}$ -Raum. Es ist eine Hyperfläche konstanter Energie. Damit also die in Gleichung (30) beschriebene Energieerhaltung gilt, muss $\underline{\omega}$ stets vom Ursprung auf die Ellipsenoberfläche zeigen, wie in Abbildung 6 dargestellt. Liegen die Koordinatensysteme von Kreisel und Labor zu einem Zeitpunkt gerade übereinander, so hat der Trägheitstensor $\underline{\Theta}$ Diagonalform, so dass sich Gleichung (30) wesentlich vereinfacht und die Halbachsen a_i des Poinsot-Ellipsoids leicht abgelesen werden können:

$$1 = \left(\frac{\omega_x}{\sqrt{\frac{2E}{\Theta_x}}} \right)^2 + \left(\frac{\omega_y}{\sqrt{\frac{2E}{\Theta_y}}} \right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\sqrt{\frac{2E}{\Theta_z}}} \right)^2 \quad (32)$$

mit

$$a_i = \sqrt{\frac{2E}{\Theta_i}} . \quad (33)$$

Aus der Kombination von Drehimpuls(Gleichung (29)) und Energieerhaltung (Gleichung (30)) ergibt sich schließlich noch eine zweite Nebenbedingung für $\underline{\omega}$:

$$(30) \quad \Rightarrow \quad \text{konst.} = E = \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\Theta} \underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{L} = \frac{1}{2} L \omega_L \stackrel{(29)}{=} \text{konst.}' \omega_L . \quad (34)$$

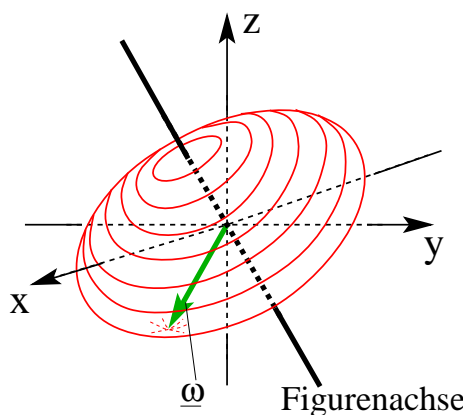


Abbildung 6: Poincaré-Ellipsoid mit eingezeichneter Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ im Laborkoordinatensystem; da sich i.a. Laborsystem und Kreiselsystem — hier angedeutet durch die Figurenachse — gegeneinander drehen, bewegt sich das (kreiselfeste) Poincaréellipsoid im Laborsystem

Hierbei ist ω_L die Projektion von $\underline{\omega}$ auf den Drehimpuls \underline{L} . Das bedeutet, dass die Komponente ω_L von $\underline{\omega}$ entlang des Drehimpulses \underline{L} konstant ist. Im Laborsystem bewegt sich also die Spitze von $\underline{\omega}$ immer in einer Ebene, die senkrecht auf \underline{L} steht, der invarianten Ebene. Bei der von uns vorgenommenen Wahl für die Ausrichtung des Laborsystem ($\underline{L} \parallel z$ -Achse) liegt die invariante Ebene parallel zur xy -Ebene im Abstand ω_L (vgl. Abbildung 7). Es läßt sich zeigen, dass das Poincaré-Ellipsoid immer nur einen Punkt mit der invarianten Ebene gemeinsam hat (invariante Ebene ist zu jedem Zeitpunkt Tangentialebene für das Ellipsoid), der durch die Spitze von $\underline{\omega}$ gegeben ist. Während der Kreiselung rollt das Poincaré-Ellipsoid auf der invarianten Ebene ab, wobei sein Mittelpunkt im Ursprung des Laborkoordinatensystems fix bleibt. (Dies ist ja der Punkt, den beide Koordinatensysteme stets gemeinsam haben.) Dabei bilden die Berührungspunkte von Ellipsoid und invarianter Ebene auf dem Ellipsoid die Polbahn, welche die Gesamtheit aller auftretenden Drehachsen im Kreiselsystem wiedergibt, und auf der invarianten Ebene die Spurbahn, welche die Gesamtheit aller auftretenden Drehachsen im Laborsystem widerspiegelt. Vom Laborsystem aus gesehen wandern also während der Kreiselbewegung die Drehachse $\underline{\omega} = \underline{\omega}(t)$ sowie die Figurenachse um den raumfesten Drehimpuls \underline{L} (z -Achse).

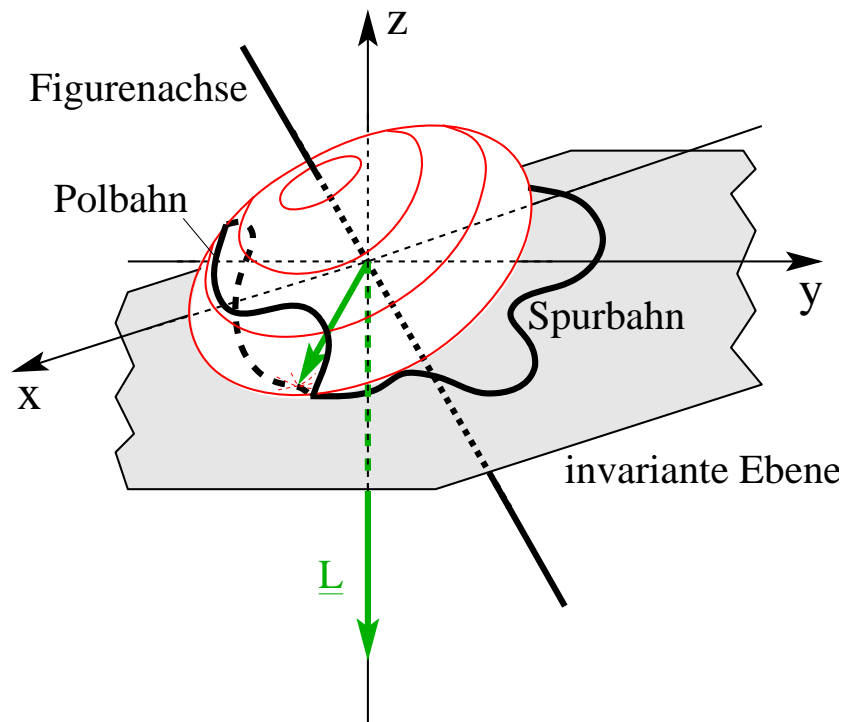


Abbildung 7: Poincaré-Ellipsoid rollt während der Kreiselung auf der invarianten Ebene ab und zeichnet dadurch die Spurbahn auf der invarianten Ebene und die Polbahn auf dem Ellipsoid

5.2 Nutation

Wir möchten nun am Beispiel des freien Kreisels den Begriff der Nutation erklären.

Definiton: Als Nutation bezeichnet man die Drehung der Figurenachse um den Drehimpuls \underline{L} .

5.2.1 Sonderfall: $\underline{\omega} \parallel$ Figurenachse

Wir wählen das Laborkoordinatensystem so, dass es zum Zeitpunkt $t = t_0$ mit dem Kreiselsystem zur Deckung kommt. Diese Situation ist in Abbildung 8 a) dargestellt. Wir betrachten nun den Kiesel zu genau diesem Zeitpunkt. Da Kiesel- und Laborsystem aufeinanderliegen hat der Trägheitstensor $\underline{\Theta}$ zu diesem Zeitpunkt auch im Laborsystem Diagonalfom, so dass für den Drehimpuls \underline{L} gilt:

$$\underline{L} = \underline{\Theta} \underline{\omega} = \Theta_z \omega \underline{e}_z . \quad (35)$$

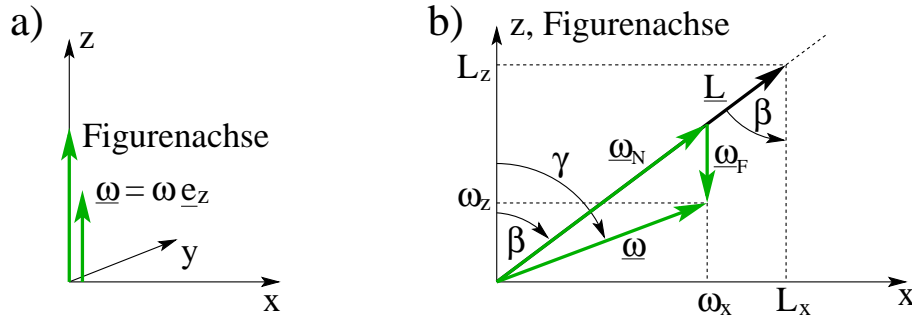


Abbildung 8: Freier Kreisel; a) Sonderfall: $\underline{\omega}$ und eine Hauptträgheitsachse (z.B. Figurenachse) liegen parallel; b) allgemeiner Fall: $\underline{\omega}$ und die Figurenachse schließen den Winkel γ ein

Hierbei ist \underline{e}_z der Einheitsvektor in z-Richtung. Damit liegt mit der momentanen Drehachse $\underline{\omega}$ auch der Drehimpuls \underline{L} parallel zur Figurenachse (z-Achse). Damit verläuft die invariante Ebene parallel zur xy-Ebene und die momentane Drehachse $\underline{\omega}$ steht senkrecht auf ihr. Die Spurbahn ist entartet zu einem Punkt und $\underline{\omega}$ ist zeitlich konstant. Figurenachse, Drehachse und Drehimpuls bleiben also für alle Zeiten in ihrer Ausrichtung parallel zur z-Achse. In diesem Fall tritt keine Nutation auf.

5.2.2 Allgemeiner Fall: Beliebiger Winkel γ zwischen $\underline{\omega}$ und Figurenachse

Wie schon im vorangehenden Sonderfall wählen wir das Laborsystem so, dass es zum Zeitpunkt $t = t_0$ mit dem Kreiselsystem zur Deckung kommt. (**Achtung:** Der Drehimpuls \underline{L} liegt jetzt nicht mehr parallel zur z-Achse, wie es bisher für den freien Kreisel der Fall war!) Da wir nach Voraussetzung mit einem symmetrischen Kreisel arbeiten (vgl. Gleichung (28)), können wir die y-Achse der beiden Koordinatensystem o.B.d.A. so ausrichten, dass zum Betrachtungszeitpunkt $\underline{\omega}$ in der xz-Ebene liegt, wie in Abbildung 8 b) dargestellt. Für den Drehimpuls gilt dann:

$$\underline{L} = \underline{\Theta} \underline{\omega} = \Theta_{xy} \omega_x \underline{e}_x + \Theta_z \omega_z \underline{e}_z, \quad (36)$$

so dass wegen $\Theta_{xy} < \Theta_z$ Drehimpuls \underline{L} und Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ nicht parallel verlaufen.

Beschreibung der Kreiselbewegung: Vom Laborsystem aus betrachtet läßt sich die Kreiselung vielleicht am einfachsten beschreiben, wenn man zunächst vom vorangehenden Sonderfall ($\underline{\omega} \parallel$ Figurenachse) ausgeht und den Kreisel

dann durch einen seitlichen Schubs leicht aus dieser Lage herausneigt. Dann führt der Kreisel im wesentlichen immer noch eine Rotation um die z-Achse durch, jetzt aber überlagert durch eine weitere Drehung, wodurch sich die Lage der momentanen Drehachse ständig ändert („Eiern“). Dies bedeutet eine Zerlegung von $\underline{\omega}$ in x- und z-Komponente:

$$\underline{\omega} = \omega_x \underline{e}_x + \omega_z \underline{e}_z \quad (37)$$

Für eine Betrachtung im Kreiselsystem zerlegt man $\underline{\omega}$ in eine Komponente parallel zum Drehimpuls \underline{L} (Einheitsvektor: \underline{e}_L) und eine Komponente parallel zur Figurenachse (z-Richtung: \underline{e}_z):

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_N + \underline{\omega}_F = \omega_N \underline{e}_L + \omega_F \underline{e}_z \quad (38)$$

Die $\underline{\omega}$ -Komponente entlang der z-Achse (ω_F) gibt dann die Kreiseldrehung um die Figurenachse wieder, die \underline{L} -Komponente (ω_N) dagegen die Drehung der Figurenachse um den Drehimpuls (=Nutation).

Achtung: $\omega_N \neq \omega_L$, da es sich bei der hier vorgenommenen Aufteilung von $\underline{\omega} = \underline{\omega}_N + \underline{\omega}_F$ **nicht** um eine orthogonale Zerlegung handelt, bei der eine Komponente durch Projektion von $\underline{\omega}$ auf \underline{L} entsteht und die zweite senkrecht dazu verläuft, sondern $\underline{\omega}_N$ und $\underline{\omega}_F$ schließen einen Winkel $\neq 90^\circ$ ein und beide enthalten einen Anteil parallel zu \underline{L} .

Zur Untersuchung der Nutationsfrequenz werden im folgenden Experiment die Größen ω_N und ω_z bestimmt. Der Zusammenhang zwischen beiden unter Berücksichtigung der „Dreheigenschaften“ des Kreisels (Θ_{xy} , Θ_z) wird hier kurz dargestellt.

Wie in Abbildung 8 b) ersichtlich, gilt:

$$\tan \beta = \frac{L_x}{L_z} = \frac{\Theta_{xy} \omega_x}{\Theta_z \omega_z} , \quad (39)$$

sowie:

$$\sin \beta = \frac{\omega_x}{\omega_N} \Leftrightarrow \omega_x = \omega_N \sin \beta . \quad (40)$$

Damit folgt:

$$\stackrel{(39),(40)}{\implies} \tan \beta = \frac{\Theta_{xy} \omega_N \sin \beta}{\Theta_z \omega_z} . \quad (41)$$

Unter der Voraussetzung, dass $\omega_x \ll \omega_z$ (die Drehachse $\underline{\omega}$ wird nur durch einen leichten seitlichen Schubs aus der parallelen Ausrichtung zur Figuren- achse herausgeneigt) gilt für den hier betrachteten Kreisel ($\Theta_{xy} < \Theta_z$):

$$L_x = \Theta_{xy} \omega_x \ll \Theta_z \omega_z = L_z , \quad (42)$$

so dass:

$$\tan \beta = \frac{L_x}{L_z} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \beta \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \cos \beta \approx 1 . \quad (43)$$

Damit lässt sich Gleichung (41) auch schreiben als:

$$\stackrel{(41)}{\Rightarrow} \quad \frac{\omega_N}{\omega_z} = \frac{\Theta_z}{\Theta_{xy}} \quad (44)$$

6 Versuch B: Messung der Nutationsfrequenz

Prüfen Sie den Zusammenhang in Gleichung (44) experimentell nach.

Aufgabe 9: Messen Sie dazu unter Verwendung des in Abbildung 9 dargestellten Aufbaus die Nutationsfrequenz des freien Kreisels für 3 verschiedene Winkelgeschwindigkeiten ω_z !

Aufgabe 10: Warum wird im Experiment die Winkelgeschwindigkeit ω_z als unabhängige Größe verwendet und nicht die Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}_F$, welche ja die Nutationswinkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}_N$ zu $\underline{\omega}$ ergänzt? vgl. Abbildung 8 b):

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_N + \underline{\omega}_F \quad (45)$$

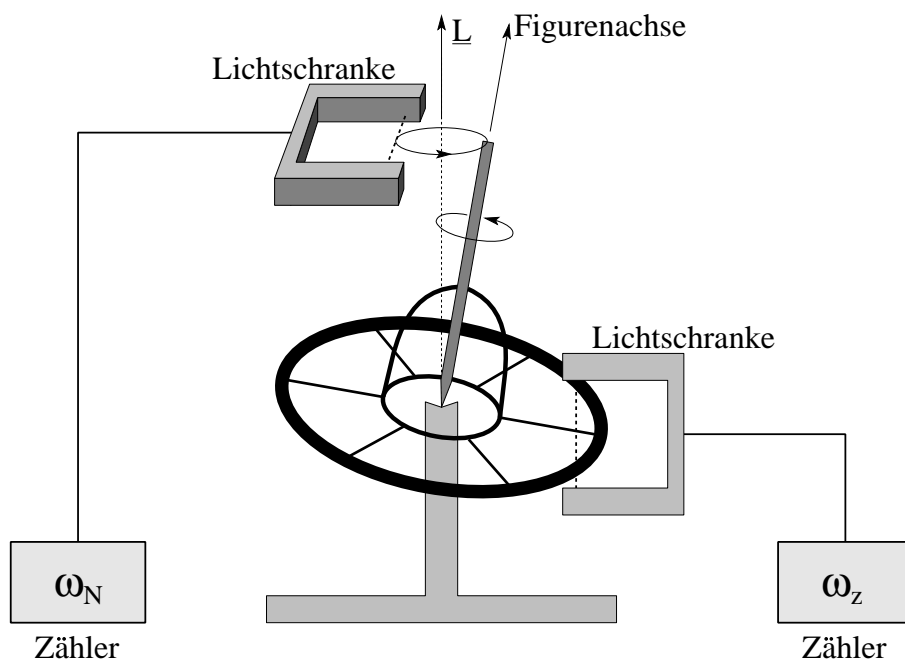


Abbildung 9: Messung der Nutationsfrequenz $\underline{\omega}_N$ als Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω_z für den freien Kiesel

7 Schwerer Kreisel

Wir lassen nun am Kreisel die Schwerkraft angreifen. Diese verursacht i.a. ein Drehmoment \underline{M} , so dass nach der Bewegungsgleichung ($\dot{\underline{L}} = \underline{M} \neq 0$) der Drehimpuls keine Erhaltungsgröße mehr darstellt.

Definition: Die Rotation des Drehimpulses \underline{L} eines Kreisels im raumfesten Koordinatensystem durch die Einwirkung eines von außen angreifenden Drehmomentes \underline{M} heißt Präzession.

Wir modifizieren den freien Kreisel zu einem schweren, indem wir analog zum Experiment zur Bestimmung des Trägheitsmomentes Θ_{xy} auch hier die Rotationsachse des Kreisels um die Strecke r_s nach oben verschieben, so dass der Kreisel durch den Fuß nicht mehr im Schwerpunkt, sondern oberhalb davon unterstützt wird. Ist der Kreisel während der Rotation genau vertikal ausgerichtet, so handelt es sich um einen schweren Kreisel.

Zur einfacheren Untersuchung der Präzession vermeiden wir das Auftreten einer Nutation und lassen den Kreisel mit der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ um eine Hauptträgheitsachse (hier: Figurenachse) drehen und neigen diese um den Winkel δ gegen die z-Achse des Laborkoordinatensystems (=Richtung der Schwerkraft), wie in Abbildung 10 a) dargestellt. Wir wählen die Ausrichtung der x-Achse des Laborkoordinatensystems so, dass die Figurenachse (und damit auch die Drehachse $\underline{\omega}$ sowie der Drehimpuls \underline{L}) zum Beobachtungszeitpunkt t_0 in der xz-Ebene liegen (vgl. Abbildung 10 a)).

Das zur Zeit $t = t_0$ durch die Gewichtskraft $F_G = m g$ hervorgerufene Drehmoment verursacht eine Drehimpulsänderung $\dot{\underline{L}}$

$$\dot{\underline{L}} = \underline{M} = \underline{r}_s \times m \underline{g} \quad \text{mit :} \quad \dot{L} = M = m g r_s \sin \delta , \quad (46)$$

welche parallel zur negativen y-Achse liegt und somit senkrecht auf dem Drehimpuls \underline{L} steht (vgl. Abbildung 10 a): \underline{M} steht senkrecht aus der Papierebene heraus). Der Drehimpuls wird sich also im nächsten Moment aus der Papierebene herausdrehen, gemäß

$$\underline{L}(t_0 + dt) = \underline{L}(t_0) + d\underline{L} = \underline{L}(t_0) + \dot{\underline{L}} dt , \quad (47)$$

wobei die z-Komponente L_z des Drehimpulses nicht verändert wird. Mit dem Drehimpuls dreht sich aber auch die Figurenachse und damit der Schwerpunkt und damit schließlich auch das Drehmoment \underline{M} aus der Papierebene heraus, so dass das angreifende Drehmoment \underline{M} und damit auch $\dot{\underline{L}}$ zu jedem Zeitpunkt senkrecht auf dem Drehimpuls \underline{L} stehen, und dabei immer in der xy-Ebene liegen (vgl. Abbildung 10 b)). Der Betrag L des Drehimpulses und

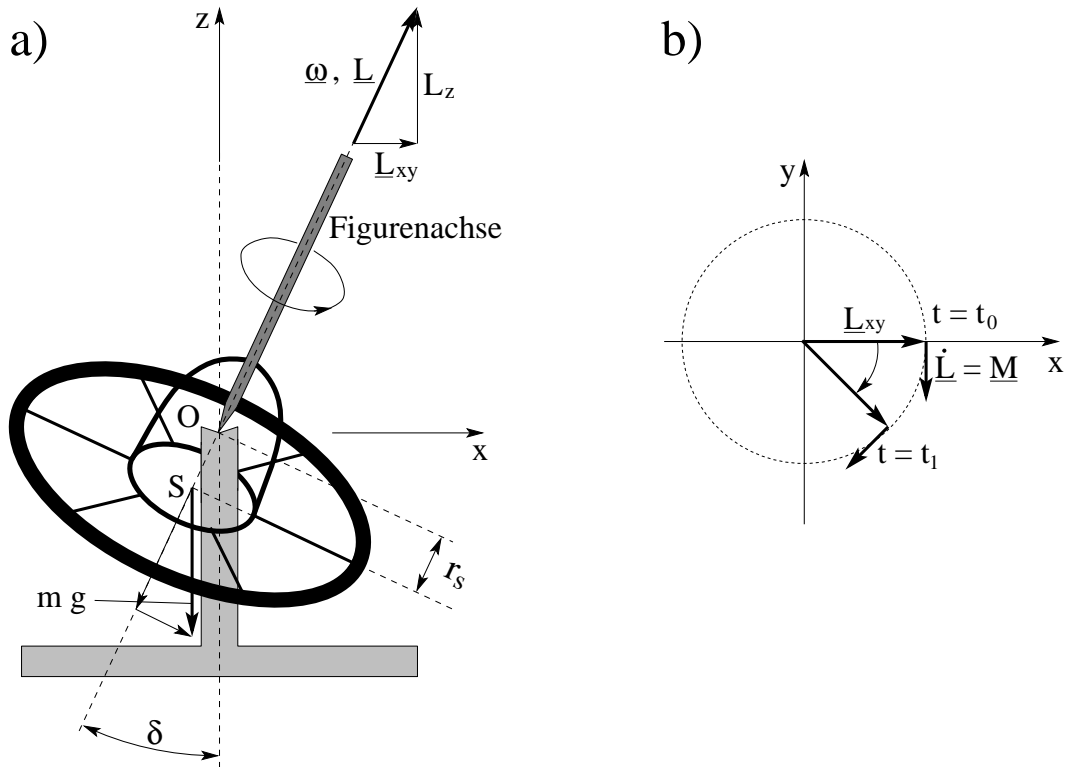


Abbildung 10: a): schematische Darstellung des hier verwendeten schweren Kreisels; b): Aufsicht von oben auf die Bewegung des Drehimpulses des Kreisels in a) im raumfesten Koordinatensystem (Präzession)

seine z-Komponente L_z sind also Konstanten der Bewegung. Damit ändert sich auch der Neigungswinkel δ der Figurenachse bezüglich der z-Achse nicht und so bleibt auch der Betrag von Drehmoment M und Drehimpulsänderung \dot{L} konstant. Der Drehimpuls \underline{L} führt also eine Kreisbewegung in der xy-Ebene durch mit Radius L_{xy} und konstanter Geschwindigkeit $\dot{L} = M$. Für die Periodendauer T_p dieser Präzessionsbewegung gilt dann:

$$T_p = \frac{2\pi L_{xy}}{\dot{L}} = \frac{2\pi L \sin \delta}{M} = \frac{2\pi \Theta_z \omega \sin \delta}{m g r_s \sin \delta} = \frac{2\pi \Theta_z}{m g r_s} \omega \quad (48)$$

8 Versuch C: Messung der Präzessionsfrequenz

Aufgabe 11: Modifizieren Sie den freien Kreisel gemäß der Beschreibung im vorangehenden Abschnitt zu einem schweren Kreisel und verifizieren Sie mit dem Aufbau aus Abbildung 11 gemäß Gleichung (48) die Abhängigkeit der Präzessionsperiodendauer T_P von der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Abstand r_s zwischen Schwerpunkt S und Unterstützungspunkt O des Kreisels!

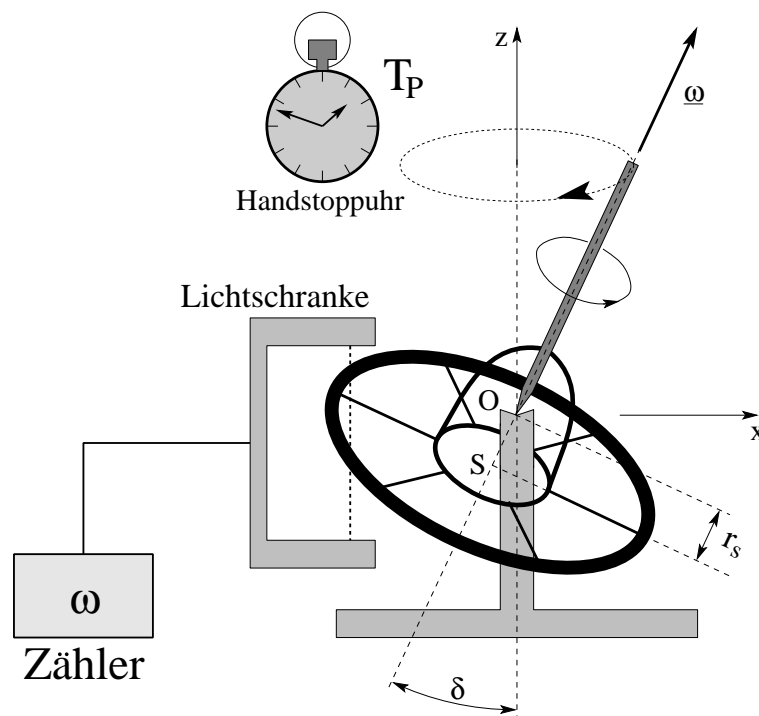


Abbildung 11: Aufbau zur Messung der Präzessionsperiodendauer als Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Abstand r_s zwischen Schwerpunkt S und Unterstützungspunkt O (nutationsfreier, schwerer Kreisel)

Aufgabe 12: Realisieren Sie mit dem schweren Kreisel eine Überlagerung von Präzession und Nutation!

9 Anhang

Berechnung des Schwerpunktes r_s für das Beispiel-Pendel in Abschnitt 3.2

Wir substituieren hier: $\xi \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{h}{b}$

$$\begin{aligned}
 r_s &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\int_m r \, dm}{\int_m dm} \\
 &= \frac{\rho}{m} \int_0^b dx \int_{-\xi x}^{\xi x} dy \sqrt{x^2 + y^2} \\
 &= \frac{\rho}{m} \int_0^b dx \left\{ \frac{1}{2} \left[y \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 \ln \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right]_{-\xi x}^{\xi x} \right\} \\
 &= \frac{\rho}{m} \int_0^b \frac{1}{2} dx \left\{ 2 \xi x^2 \sqrt{1 + \xi^2} + x^2 \ln \left(\frac{x \left(\xi + \sqrt{1 + \xi^2} \right)}{x \left(-\xi + \sqrt{1 + \xi^2} \right)} \right) \right\} \\
 &\stackrel{\text{(NR)}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\rho}{m} \int_{\epsilon}^b \frac{1}{2} x^2 dx \left\{ 2 \xi \sqrt{1 + \xi^2} + 2 \ln \left(\xi + \sqrt{1 + \xi^2} \right) \right\} \\
 &= \frac{\rho}{m} \left\{ \xi \sqrt{1 + \xi^2} + \underbrace{\ln \left(\xi + \sqrt{1 + \xi^2} \right)}_{\doteq \xi + O(\xi^3)} \right\} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^b \\
 &= \frac{1}{3} \frac{\rho}{m} \xi b^3 \left(1 + \underbrace{\sqrt{1 + \xi^2}}_{\doteq 1 + \frac{1}{2} \xi^2 + O(\xi^3)} \right) \\
 &\stackrel{m = \rho \xi b^2}{=} \frac{1}{3} b \left(2 + \frac{1}{2} \xi^2 \right)
 \end{aligned}$$

Nebenrechnung (NR):

$$\ln \left(\frac{\xi + \sqrt{1 + \xi^2}}{-\xi + \sqrt{1 + \xi^2}} \right) = \ln \left(\frac{\left(\xi + \sqrt{1 + \xi^2} \right)^2}{1 + \xi^2 - \xi^2} \right) = 2 \ln \left(\xi + \sqrt{1 + \xi^2} \right)$$