Frequenzanalyse akustischer Schwingungen

Schwingungsvorgänge treten bei sehr vielen physikalischen Phänomenen auf. Oft sind sie mit einer Wellenausbreitung verbunden. Ein Beispiel dafür sind die akustischen Schwingungen. Die computergestützte Auswertung von periodischen Vorgängen mit Hilfe der Fourier-Transformation wird Frequenz- oder Fourieranalyse genannt. Diese findet in vielen Bereichen der Physik Anwendung.

1 Lernziele

- Schwingungen und deren Kenngrößen wie Frequenz, Amplitude, Phase, ...
- Wellen und deren Kenngrößen wie Frequenz, Amplitude, Phasengeschwindigkeit, ...
- Überlagerung von Schwingungen - Schwebung, Schwebungsfrequenz Δf
- Saitenschwingung - die Grundfrequenz f_1 hängt von der Länge L , der Spannung F/A und der Materialdichte ϱ ab: $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\varrho A}}$
- Frequenzspektrum als Darstellung der Amplitude der Schwingung als Funktion der Frequenz

2 Experimenteller Aufbau

- zwei Saiten auf einem Resonanzkasten (Monochord),
- Referenzstück einer Seite
- Gewichte zur Änderung der Seilspannung
- Maßband mit einer Ablesegenauigkeit von $\pm 1\,\mathrm{mm}$
- Präzisionswaage
- Gabellichtschranke
- Resonanzstimmgabeln mit Abstimmgewicht
- Mikrophon an Sensor-CASSY zur Aufnahme und anschließenden Fourieranalyse mit dem Computer

3 Messungen

a) Messen Sie die Frequenz $f(F)$ einer eingespannten Saite als Funktion von der Saitenspannung F/A.
b) Erfassen Sie das Frequenzspektrum und die Grundfrequenz f_0 einer Resonanzstimmgabel.
c) Messen Sie die Frequenz $f(L)$ einer eingespannten Saite als Funktion von der Saitenlänge L.
d) Ermitteln Sie die Schwebungsfrequenz Δf zweier, zueinander leicht verstimmter Stimmgabeln.

$\Rightarrow$ Auswertung

e) Zeichnen Sie die Frequenzspektren verschiedener Schallquellen auf (Musikinstrumente, Stimme,...) und diskutieren Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

4 Zusätzliche Messungen

Nehmen Sie die Einschwingvorgänge von verschiedenen Schallquellen als Datensatz auf und führen Sie anschließend die Frequenzanalyse für verschiedene Zeitintervalle durch: a) unmittelbar zu Beginn, b) im eingeschwungenen Zustand und c) beim Ausklang des Tons. Diskutieren Sie qualitativ die Verschiebungen und Amplitudenänderungen von Peaks im Frequenzspektrum.

5 Versuchsdurchführung

zu 3a) Saitenschwingungen - veränderliche Saitenspannung

- Die Eigenfrequenz einer Saite $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\varrho A}}$ ist eine Funktion der Länge L, der Dichte ϱ und der Spannung F/A. Da die Saiten zylinderförmig sind, vereinfacht sich der Vorfaktor und es folgt

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\ell}{m}}\sqrt{F} \quad \text{mit der Masse } m \text{ und der Länge } \ell \text{ eineres Referenzstückes.} \tag{1}$$

  Ermitteln Sie m und ℓ vom Referenzmaterial. Notieren Sie die jeweiligen Messunsicherheiten für die Größtfehlerberechnung bei der Auswertung.
- Erfassen Sie die Eigenfrequenz/Grundfrequenz einer Saite $f_1(F)$ für verschiedene Zugkräfte bei der festen Saitenlänge L (ohne Steg). Die Zugkräfte werden durch variable Gewichte an der Saite eingestellt. Diese sind über eine Umlenkrolle an der Saite angehängt. Die Schwingungsfrequenz wird mit einer Gabellichtschranke in der Mitte der Saite erfasst. Die Saite wird in der Mitte horizontal zum Schwingen angeregt, damit möglichst nur die Grundschwingung ertönt. Messen Sie für mindestens 10 Zugkräfte mit variablen Gewichten bis maximal 8.6 kg die Frequenz der Grundschwingung.

zu 3b) Stimmgabel einzeln

- Verwenden Sie die Resonanzstimmgabel a^1=440 Hz ohne Abstimmgewicht und den Anschlaghammer zur Tonerzeugung. Mit einem Mikrophon werden die ausgesendeten Schallwellen von den Stimmgabelschwingungen in elektrische Spannungen umgewandelt und diese mit dem CASSY analysiert. Die CASSY-Software stellt sowohl die Amplitude $A(t)$ als auch das zugehörige Frequenzspektrum $|\hat{A}(f)|$ eines aufgezeichneten Signals dar. Sie können die Empfindlichkeit des Mikrophons, die Messdauer und die Abtastrate variieren, wodurch sich die Genauigkeit der Frequenzbestimmung ändert. Ermitteln Sie geeignete Einstellungen, um die Eigenfrequenz der Stimmgabel auf genauer als 0.5 Hz zu ermitteln. Drucken Sie das Signal und das zugehörige Frequenzspektrum für Ihr Protokoll aus.

zu 3c) Saitenschwingungen - veränderliche Saitenlänge

- Bestimmen Sie die Grundfrequenz $f_1(L)$ mit der Gabellichtschranke für die fest eingespannte Saite (ohne Rollen), zuerst ohne Steg. Erfassen Sie mit dem Mikrofon und dem CASSY das Frequenzspektrum dieser Anordnung und identifizieren Sie in diesem die Grundfrequenz. Drucken Sie das Spektrum aus und kennzeichnen Sie die Position der Grundfrequenz und der höheren Harmonischen.
  Ermitteln Sie aus den jeweiligen Frequenzspektren die Grundfrequenzen der Saitenschwingungen für 10 verschiedene Saitenlängen L. Verwenden Sie dazu den Steg. Schätzen Sie die Messunsicherheit bei der Frequenzbestimmung ab.

zu 3d) zwei Stimmgabeln - Schwebung

- Verwenden Sie bei einer Stimmgabel ein Abstimmgewicht. Variieren Sie dessen Position an der Gabel, bis Sie beim gleichzeitigen Anschlagen der Stimmgabeln eine Schwebung mit der Frequenz von ungefähr 1 Hz hören. Führen Sie die Fourieranalyse durch. Optimieren Sie die Parameter Empfindlichkeit des Mikrophons, die Messdauer und die Abtastrate bis Sie eindeutig die beiden Frequenzen f_1 und f_2 der Stimmgabeln im Frequenzspektrum voneinander trennen können. Drucken Sie das Signal $A(T)$ und das Frequenzspektrum $|\hat{A}(f)|$ für Ihre Unterlagen aus.

Werten Sie den Versuch bis hierhin aus, bevor Sie weiter fortfahren.

zu 3e) Frequenzspektren von Schallquellen - Klangmuster - höhere harmonische Schwingungen

- Bestimmen Sie die drei Frequenzspektren das Monochords mit fest eingespannten Saite wenn die Anregung in der Mitte und bei $\frac{1}{4}L$ und $\frac{1}{8}L$ erfolgt.
- Am Arbeitsplatz stehen verschiedene Musikinstrumente zur Verfügung. Zeichnen Sie deren unterschiedlichen Klänge als Frequenzspektren auf. Auch können Sie versuchen, mit Ihrer Stimme den Kammerton a^1 der Stimmgabeln möglichst genau wiederzugeben ☺.
  Beobachten Sei bei Ihren Versuchen insbesondere die Amplitude der Grundschwingung f_1 und deren Verhältnis zu den höheren harmonischen Schwingungen zu $f_n = nf_1$.

6 Auswertungen

zu 3a) Saitenschwingungen - veränderliche Saitenspannung

- Berechnen Sie den Faktor $c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{m}}$ des Saitenmaterials aus der Masse und den geometrischen Abmessungen der Referenzprobe. Welche Einheit hat c? Führen Sie die Größtfehlerberechnung zur Bestimmung von $u(c)$ durch.
- Stellen Sei die Eigenfrequenz $f_1(F)$ grafisch dar, wobei der Koordinatenursprung enthalten sein soll. Führen Sie einen benutzerdefinierten, nichtlinearen Fit mit der Funktion $f_1 = c_F\sqrt{F}$ durch, um c_F zu ermitteln. Welche Einheit hat c_F?
- Berechnen Sie $c_F^B = c/L$ und die Messunsicherheit $u(c_F^B)$ aus $u(c)$ und $u(L)$. Vergleichen Sie c_F^B mit c_F aus Ihrem Fit. Zeichnen Sie die Funktion $f_1^B = c_F^B\sqrt{F}$ in Ihre Abbildung ein.

zu 3b) Stimmgabel einzeln

- Notieren Sei in Ihrem Protokoll den Einfluss der Messdauer T und der Abtastfrequenz f_A auf das Frequenzspektrum, insbesondere im Hinblick auf die erreichbare Frequenzauflösung (Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Frequenzwerten im Spektrum) und die maximale Frequenz im Spektrum, welche auch Nyquist-Frequenz genannt wird.

zu 3c) Saitenschwingungen - veränderliche Saitenlänge

- Erstellen Sie zwei Abbildungen zur Abhängigkeit der Grundfrequenz von der Länge der Saite. Eine Abbildung mit $f_1(L)$ und die zweite Abbildung mit $f_1(1/L)$. Führen Sie jeweils einen nichtlinearen Fit mit $f_1 = c_L^{nl}L^{-1}$ beziehungsweise eine lineare Regression zur Bestimmung von c_L^l durch. Diskutieren Sie die Ursachen für die möglichen Unterschiede zwischen c_L^{nl} und c_L^l. Beachten Sie, dass beide Werte aus dem selben Datensatz berechnet wurden.
  Berechnen Sie aus den bestimmten c_L die Kraft F mit der die Saite eingespannt ist.

zu 3d) Zwei Stimmgabeln - Schwebung

- Bestimmen Sie die Frequenzen der Stimmgabeln f_1^a und f_1^b aus dem Frequenzspektrum $|\hat{A}(f)|$ bei der Schwebung. Berechnen Sie die Differenz $\Delta f = |f_1^a - f_1^b|$ und kennzeichnen Sie die zugehörigen Peaks f_1^a, f_1^b und Δf im Frequenzspektrum.
- Stellen Sie die gemessene zeitabhängige Amplitude $A(t)$ in zwei Skalierungsstufen dar: a) so skaliert, dass die einzelnen Schwingungen sichtbar sind und b) dass die einhüllende Funktion der Schwebung deutlich erkennbar ist. Skizzieren Sie in b) eine Schwingung mit der Frequenz Δf.
- Die Lautstärkewahrnehmung ist proportional zur mittleren übertragenen Leistung der Schallwellen und somit proportional zum Quadrat der Amplitude $A(t)$. Erstellen Sei eine Abbildung mit $A(t)^2$ und tragen Sie in diesem Diagramm die Periodendauer der empfundenen Lautstärkemodulation der Schwebung ein. Welche Frequenz hat die empfundene Lautstärkemodulation?

zu 3e) Frequenzspektren von Schallquellen - Klangmuster - höhere harmonische Schwingungen

- Kennzeichen Sie in den drei Frequenzspektren des Monochords die Grundfrequnez f_1 und die höheren harmonischen Schwingungen f_n. Welche qualitativen Aussage können Sie über die Amplituden der höheren Harmonischen angeben, wenn Sie die Spektren zu den unterschiedlichen Anregungspunkten miteinander vergleichen?
- Die Klänge der Instrumente definieren sich durch die Verhältnisse der Amplituden der einzelnen Obertöne (höhere Harmonische). Geräusche hingegen haben keinen eindeutigen Grundton und sind nichtperiodisch.

7 Vorbereitung, Fragen und Berechnungen vor Versuchsantritt

Die Physik dieses Versuches finden Sie in einschlägigen Lehrbüchern unter der Thematik: Schwingungen und Wellen, zum Beispiel in [1, 2]. Insbesondere wird in [2, Kap.12.7] die Resonanz einer stehenden Seilwelle diskutiert.
Das verwendete Monochord ist im Abschnitt F Kap. 1.3 der Ref. [3] beschrieben. Als Vorbereitung auf die Fourieranalyse sollen Sie die Idee der Fouriertransformation verstanden haben. Eine Einführung erhalten Sie am Anfang des Abschnittes F in Ref. [3]. Informationen zur Schwebung finden Sie ebenfalls in diesem Buch im Kapitel zu gekoppelten Pendeln und in F 1.1.

a) Wann ist eine Schwingung – im physikalischen Sinne – harmonisch? Nennen Sie Beispiele von unharmonischen Schwingungen welche dennoch periodisch sind?
b) Was sind höhere harmonische Schwingungen?
c) Was ist der Zusammenhang zwischen der Periodendauer T, der Frequenz f und der Kreisfrequenz ω einer Schwingung?
d) Skizzieren Sie die harmonische Schwingung $A(t) = A\cos(\omega t)$ und $B(t) = A(t)^2$. Ist $B(t)$ ebenfalls harmonisch? Tragen Sie die Größen Amplitude und Periodendauer ein. Welche Periodendauer hat $B(t)$ bezüglich $A(t)$?
e) Was ist der Unterschied zwischen einer Welle und einer Schwingung?
f) Leiten Sei die Gl. (1) aus $f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\varrho A}}$ ab und zeigen Sie, dass der Ausdruck die Dimension einer Frequenz besitzt.
g) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle, deren Frequenz und Wellenlänge? Was ist der Unterschied zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit?
h) Ist bei Schallwellen in Luft die Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Frequenz abhängig?
i) Was bedeuten die $||$ bei der Amplitude $|\hat{A}(f)|$ im Frequenzspektrum?
j) Was besagt das Nyquist-Shannon-Abtasttheorem in diesem Zusammenhang?

8 Literatur

[1] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer, 25. Auflage, 2015. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5.

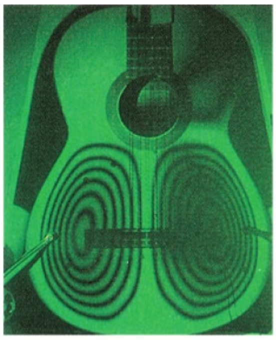
[2] P. A. Tipler. *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Springer Spektrum, 2015. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-54166-7.

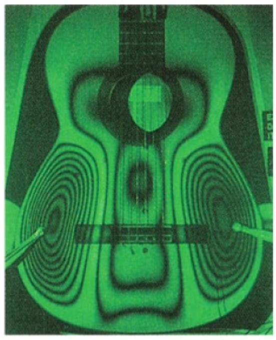
[3] W. Schenk und F. Kremer (Hrsg.) *Physikalisches Praktikum*. Springer, 14. Auflage, 2014. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-00666-2.

[4] W. Demtröder. *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*. Springer, 2015. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-46415-1.

9 Zusatzmaterial

- Die Eigenfrequenz oder auch Grundschwingung wird manchmal mit f_0 und manchmal mit f_1 bezeichnet. Letzteres in Anlehnung, dass es die erste Harmonische ist. Welche benutzt wird ergibt sich aus dem Kontext.
- Das Dach $.\hat{.}.$ bei der Amplitude $\hat{A}(f)$ weißt darauf hin, dass diese Funktion eine andere Funktion als $A(t)$ ist, jedoch aus ihr abgeleitet wurde.
- Wenn der reelwertige Datensatz $A(t_i)$ genau N Datenpunkte beinhaltet, so hat auch die diskrete Fouriertransformation $|\hat{A}(f_i)|$ genau N Datenpunkte, welche komplexwertig sind. Ein reelwertiges $A(t_i)$ bedeutet, dass die Imaginäteile vom $A(t_i)$ identisch Null sind. Dies führt unmittelbar zu einer Symmetrie im komplexwertigen Spektrum $\hat{A}(-f_i) = \hat{A}^*(f_i)$, wobei der Stern * das komplex konjugierte der Größe bezeichnet.
- Die Transformation $A(t) \longrightarrow \hat{A}(f)$ vom Zeit- in den Frequenzraum ist eineindeutig und umkehrbar und somit gilt $A(t) \longleftrightarrow \hat{A}(f)$. Dies bedeutet ebenfalls, dass das vollständige Fourierspektrum $\hat{A}(f)$ die selbe Information wie das zugrundeliegende Zeitsignal hat, dies gilt nicht für das Amplitudenspektrum $|\hat{A}(f)|$, es fehlt die Phaseninformation.
- Holographische Interferogramme einer Gitarre bei zwei verschiedenen Anregungsfrequenzen. Die abwechselnden hellen und dunklen Streifen entstehen Aufgrund der Auswölbungen/Einbuchtungen des Gitarrendeckels. Zwischen dem Hell-Dunkel-Hell-Punkten ist ein Höhenunterschied von der Wellenlänge $\lambda \approx 0.5\,\mu\text{m}$ des verwendeten Lichtes, siehe auch Versuch „Newtonsche Ringe". Auf der Linken Abbildung ist eindeutig *ein* Wellenberg und *ein* Wellental zu erkennen. Die Abb. ist [2] entnommen.





- Eine Abbildung aus [4].

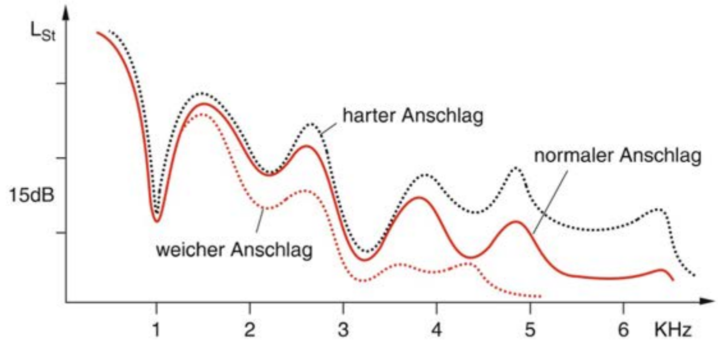


Abb. 11.96. Frequenzspektrum der C_4-Saite ($\nu_0 = 262\,\text{Hz}$) des Klaviers bei weichem, normalen und hartem Anschlag