Fachrichtungen der Physik

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Physikalisches Grundpraktikum

Fehlerrechnung

WWW-Adresse Grundpraktikum Physik: http://grundpraktikum.physik.uni-saarland.de/

Kontaktadressen der Praktikumsleiter:

PD Dr. Manfred Deicher
Zimmer: 1.11, Gebäude E 2.6
e-mail: manfred.deicher@tech-phys.uni-sb.de
Telefon: 0681/302-58198

PD Dr. Patrick Huber
Zimmer: 3.23, Gebäude E2.6
e-mail: p.huber@physik.uni-saarland.de
Telefon: 0681/302-3944

Version 3 (3/2010)

1. Grundlagen

1.1 Einleitung

Im Rahmen des Grundpraktikums soll der Studierende das Experimentieren erlernen. Dazu gehört das Kennenlernen der Messtechnik und der Technik des Messens, aber auch das Erlernen der Bewertung eines Messergebnisses. Denn um aus den Ergebnissen eines Experimentes schließen zu können, ob ein theoretisches Modell gültig ist oder nicht, muss die Qualität und Aussagekraft der Messung bekannt sein. Alle Messungen, wie sorgfältig sie auch geplant und durchgeführt werden, unterliegen Messunsicherheiten. Diese zu untersuchen, ihre Größe und Ursachen zu bestimmen, sind Gegenstand der Fehleranalyse.

Die Angabe eines Messwertes allein reicht nicht aus. Die Angabe der Messunsicherheit ist unbedingt notwendig, um auf die Aussagekraft der Messung zu schließen. Vereinfacht gilt:

Die Messung einer physikalischen Größe ohne Angabe der Messunsicherheit ist wertlos.

Grobe Fehler und Irrtümer, z.B. falsche Bedienung der Messapparatur, falsche Protokollierung von Messdaten oder Programmfehler in Auswerteprogrammen, werden nicht als Messunsicherheiten betrachtet. In diesem Fall sind die Messungen oder die Auswertung falsch und müssen wiederholt werden. Das Vorhandensein grober Fehler erkennt man nur durch kritisches Überprüfen und Kontrollieren der Messergebnisse.

Eine physikalische Größe wird durch Zahlenwert und Maßeinheit beschrieben. Jede physikalische Größe lässt sich experimentell nur näherungsweise bestimmen. Die Zahlenwerte liegen innerhalb eines von dem Messverfahren abhängigen Fehlerintervalles, das gesondert abgeschätzt werden muss. Die Schwankungen können ihre Ursache in der Messgröße oder in der Messapparatur haben. Die mathematische Formulierung physikalischer Gesetzmäßigkeiten ist daher nur als ein Grenzfall verschwindend kleiner Fehlerbereiche anzusehen.

Zwei unbedingt zu unterscheidende Begriffe beim Bewerten von Messergebnissen sind *Präzision* und *Genauigkeit*. Die Präzision beschreibt, wie gut eine Messung durchgeführt wurde, d.h. wie reproduzierbar der Messwert ist, die Genauigkeit gibt dagegen an, wie nahe der Messwert dem „wahren“ Wert ist. Durch eine falsche Anlage des Experiments oder ein defektes Messgerät kann mit hoher Präzision ein völlig unsinniger Messwert bestimmt werden. Man muss bei einer Messung sowohl nach Präzision als auch nach Genauigkeit streben.

Diese beiden Eigenschaften werden durch zwei unterschiedliche Arten von Messabweichungen oder Fehlern bestimmt: Systematische und zufällige (statistische) Fehler. Die Grenze zwischen beiden ist nicht immer eindeutig zu ziehen. Die systematischen Fehler werden z.B. durch Ungenauigkeit der Eichung eines Messgerätes und der Anzeige des Gerätes infolge von fehlerhafter Funktion verursacht. Sie sind oft dadurch gekennzeichnet, dass sie den Messwert meist stes in eine Richtung verfälschen. (Beispiel: der verbogene Zeiger eines Messgerätes).

Systematische Fehler erkennt man durch geeignete Kontrollmessungen der Messapparatur an bekannten Messobjekten, d.h. durch Eichung des Messgerätes. Obwohl die systematischen Fehler ebenso wichtig sind wie die zufälligen, spielen letztere bei der üblichen Fehlerabschätzung eine größere Rolle. Das liegt u.a. daran, dass sie durch eine einfache Statistik leicht zu erkennen und abzuschätzen sind und ohne Änderung der Messapparatur auch meist durch Wiederholung des Messvorganges verringert werden können. Zufällige Fehler können ein Messergebnis mit ähnlicher Wahrscheinlichkeit zu höheren oder zu niedrigeren Werten hin verfälschen. Diese Symmetrie unterscheidet sie von den systematischen Fehlern. Beispiele für Ursachen zufälliger Fehler sind ein schwankender Zeigerausschlag oder das Abschätzen von Zwischenwerten auf einer Skala. Die im folgenden angegebenen Methoden der Fehlerabschätzung beschränken sich auf den Anteil der zufälligen Fehler am Gesamtfehler. Allerdings

muss die Möglichkeit systematischer Fehler, die die zufälligen Fehler überwiegen könnten, immer bei der Auswertung einer Messung berücksichtigt werden.

1.2 Darstellung von Messergebnissen

Bei der Messung einer physikalischen Größe wird experimentell für diese Größe die Maßzahl zu einer gegebenen Einheit zu ermitteln. Eine korrekte Angabe von Messergebnissen beinhaltet daher Messwert, Messunsicherheit (Fehler) und Maßeinheit. Benutzt man die absolute Messunsicherheit, so gibt man den besten Schätzwert (Bestwert) der Messgröße und ihre Unsicherheit an:

Messwert = (Bestwert ± Unsicherheit) [Maßeinheit]

Die Angabe der Unsicherheit zeigt zwar die Zuverlässigkeit des Messergebnisses an, doch lässt sich die Qualität der Messung schneller an dem Quotienten aus Unsicherheit und Bestwert, der relativen Messunsicherheit, erkennen:

Messwert = (Bestwert) [Maßeinheit] ± (Unsicherheit/Bestwert) [%]

Für die Angabe der Messunsicherheit wird die Messunsicherheit auf eine signifikante Stelle gerundet. Für die Angabe des Messwertes soll die letzte signifikante Stelle dieselbe Größenordnung besitzen wie die Messunsicherheit.

Beispiel: Eine Messung der Erdbeschleunigung liefert das rechnerische Ergebnis 9,8243 m/s^2 und die Berechnung der Messunsicherheit ergibt ± 0,02385 m/s^2. Dann wird das Ergebnis für die Messunsicherheit auf ± 0,02 m/s^2 gerundet. Für das Beispiel bedeutet dies:

$$g = (9{,}82 \pm 0{,}02)\ \mathrm{m/s^2}$$

Wäre die Messunsicherheit 0,2 m/s^2, so lautete die sinnvolle Angabe des Messergebnisses

$$g = (9{,}8 \pm 0{,}2)\ \mathrm{m/s^2}$$

Werden allerdings Messwerte benützt, um die gesuchte Größe zu berechnen, so müssen mindestens zwei signifikante Stellen der Messunsicherheit mitgeführt werden, um Rundungsfehler möglichst klein zu halten.

2. Messfehler der Einzelgröße

2.1 Mittelwert

Zur Verkleinerung des Anteils der zufälligen Fehler am Gesamtfehler misst man dieselbe Größe x mehrfach unter unveränderten Versuchsbedingungen. Aus n Einzelmessungen x_i bestimmt man den Mittelwert $\overline{x}$ durch arithmetische Mittelung:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

Die Mittelwertbildung führt zu einer genaueren Aussage als der Einzelmesswert, da sich die Schwankungen der Messgröße, soweit es sich um zufällige Fehler handelt, teilweise kompensieren. Systematische Fehler werden dagegen durch eine Mittelwertbildung nicht verringert, da sie jeden Einzelmesswert normalerweise in derselben Richtung verfälschen. Zu unterscheiden ist der Mittelwert vom „wahren Wert“ (bezüglich der zufälligen Fehler). Beide werden erst dann übereinstimmen, wenn die Zahl n gegen Unendlich geht.

Der arithmetische Mittelwert $\overline{x}$ ergibt sich aus der Forderung, dass die Summe der Quadrate aller Abweichungen der Einzelmesswerte x_i vom Mittelwert minimal sein soll:

$$f = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \doteq \text{Minimum} \tag{2}$$

Fassen wir f als Funktion von $\overline{x}$ auf, so ist das Minimum durch die Nullstelle der ersten Ableitung gegeben

$$\frac{df}{d\overline{x}} = -2\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0 \tag{3}$$

und daraus folgt

$$n\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \;\Rightarrow\; \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

2.2 Gauß-Fehler der Einzelmessung

Das Ausgleichsprinzip, das auf das arithmetische Mittel führt, nennt man Gaußsches Ausgleichsprinzip oder die Methode der kleinsten Quadrate. Bei dieser Methode wird das Minimum von Gl. (2) als Maß für die Schwankung der x_i um den Mittelwert, d.h. für den Fehler genommen. Freilich wächst das Minimum mit wachsender Zahl von Messungen, daher muss man durch die Zahl der Messungen dividieren, genauer durch die Zahl der Kontrollmessungen, denn nur diese können eine Aussage über den Fehler geben. Ist der wahre Wert bereits vor der Messung bekannt (z.B. die Winkelsumme in einem Dreieck), so stellen alle n Messungen Kontrollmessungen dar. Häufig aber ist der wahre Wert unbekannt, so dass von den n Messungen nur n-1 Kontrollmessungen sind. Damit das Fehlermaß von der Dimension der Messgröße ist, muss noch die Wurzel gezogen werden, und wir erhalten

$$\Delta x_G = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \tag{4}$$

Dieser Fehler trägt die Bezeichnung „mittlerer Fehler der Einzelmessung“, „Gaußscher Fehler der Einzelmessung“ oder „Standardabweichung“. Er ist ein Maß für die Streuung der Einzelwerte um den Mittelwert, wobei die Unsicherheit des Mittelwertes, d.h. dessen mögliche Abweichung vom wahren Wert durch die Division durch n-1 statt durch n mitberücksichtigt ist. Das Quadrat des Fehlers wird auch „Varianz“ genannt.

In der Statistik bezeichnet man die Gesamtheit aller unter gleichen Bedingungen aufgenommenen Messungen als Grundgesamtheit, die durch eine Grenzverteilung beschrieben wird. Da die dazu erforderliche Datenmenge unendlich groß ist, kann man nie eine Realisierung der Grenzverteilung erreichen, sondern man muss sie durch eine Stichprobe vom Umfang n annähern.

Unterschiedliche Messgrößen haben oft auch unterschiedliche Grenzverteilungen. So werden z.B. Messungen, die vielen kleinen und zufälligen Abweichungen unterliegen, durch eine Gauß- oder Normalverteilung beschrieben. Andere Beispiele für physikalische Verteilungen sind in der Theorie der Wärme die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung oder beim Zählen von Ereignissen aus dem radioaktiven Zerfall die Poissonverteilung.

Folgt die Verteilung der Messwerte um den Mittelwert herum einer Gaußschen Normalverteilung (s. Bild des 10 DM-Scheins auf der Titelseite), so gibt der Fehler Δx_G den Abstand ihrer Wendepunkte vom Mittelwert an, und im Fehlerintervall befinden sich 68% aller gemessenen Einzelwerte. Die Breite der Gauß-Verteilung entspricht der Standardabweichung. Liegt keine

Gauß-Verteilung vor, so lässt sich ein genauer Zahlenwert für die Wahrscheinlichkeit, dass ein weiterer zu messender Wert in das Fehlerintervall fällt, nicht genau angeben. Man kann aber sagen, dass er mit überwiegender Wahrscheinlichkeit in dieses Intervall fallen wird.

Mit dem Mittelwert $\overline{x}$ und dem Fehler Δx_G wird das Ergebnis einer Messung angegeben in der Form:

$$x = \overline{x} \pm \Delta x_G \tag{5}$$

2.3 Durchschnittlicher Fehler

Häufig wird auch ein anderes Streumaß verwendet, die durchschnittliche absolute Abweichung der Einzelergebnisse vom Mittelwert

$$\Delta x_d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} | x_i - \overline{x} | \tag{6}$$

Obwohl er vom statistischen Standpunkt aus eine etwas unsaubere Definition darstellt, ist sein Gebrauch weit verbreitet.

2.4 Gaußscher Fehler des Mittelwertes

Meist interessiert nicht so sehr die Streuung der x_i um $\overline{x}$, sondern die Zuverlässigkeit des aus der Messreihe als Bestwert gefundenen Mittelwertes, d.h. dessen Fehler bezüglich des wahren Wertes, der bei $n \to \infty$ erreicht wird. In der Gaußschen Fehlertheorie ergibt sich dieser ‚mittlere Fehler des Mittelwertes' oder „Gaußsche Fehler des Mittelwertes" zu

$$\delta x_G = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} \tag{7}$$

Er sagt aus, dass mit überwiegender Wahrscheinlichkeit der wahre Wert der Messgröße x_w innerhalb des Intervalls

$$\overline{x} - \delta x_G \le x_w \le \overline{x} + \delta x_G$$

liegt.

2.5 Absoluter und relativer Fehler

Die bisher besprochenen Fehler sind absolute Fehler. Damit bezeichnet man das Fehlerintervall der Messgröße. Absolutfehler der Größe und die Größe selbst haben dieselbe Maßeinheit. Dividiert man den Absolutfehler durch den Absolutbetrag des Mittelwertes der Messgröße, so erhält man den relativen Fehler; er ist dimensionslos und wird häufig in Prozent angegeben.

2.6 Größenordnungsmäßige Angabe von Messfehlern

Zur exakten Angabe eines Messergebnisses muss der Fehler hinzugefügt werden. Dabei ist es sinnlos, das Messergebnis oder dessen Fehler mit einer übermäßigen Stellenzahl anzugeben. Messfehler rundet man, da sie im allgemeinen nur grobe Wahrscheinlichkeitsaussagen darstellen, auf ein oder zwei Stellen ab. Das Messergebnis soll dann so viele Stellen enthalten, dass in der letzten (bzw. den letzten beiden) der Fehler liegt, die übrigen aber als zuverlässig anzusehen sind. Entsprechendes gilt für mittelbare Resultate, die man durch Rechnung aus verschiedenen Messwerten erhält. Eine, nur durch die Rechnung bedingte, zu große Stellen-

zahl ist gemäß dem Gesamtfehler des mittelbaren Resultates abzurunden. Bei geringeren Anforderungen an die Genauigkeit von Messungen genügt es oft zu wissen, in welcher Dezimalstelle der Maßzahl der Fehler liegt, ohne dessen genaue Größe zu kennen. Für diesen Fall ist man übereingekommen, Messergebnisse in Dezimalzahlen so anzugeben, dass die vorletzte Ziffer noch zuverlässig ist, und in der letzten der Fehler liegt. Eine an letzter Stelle stehende Null muss dann mit angeschrieben werden; würde man sie fortlassen, so würde dies einen um eine Zehnerpotenz zu großen Fehler vortäuschen.

3. Fehlerfortpflanzung

Die bisher angegebenen Fehler charakterisieren die Streuung einer direkt gemessenen Größe. Häufig ist man aber an einer mittelbaren Größe $Z(x,y,z,\ldots)$ interessiert, die sich über eine Formel aus verschiedenen Messwerten x, y, z, … ergibt. Infolge der Fehler der direkten Messwerte hat auch Z einen Fehlerbereich. Als Fehlerfortpflanzung bezeichnet man die Auswirkung der Einzelfehler δx, δy, usw. auf Z. Je nach Art der Funktion Z kann diese Auswirkung völlig unterschiedlich sein, z.B. kann ein winziger Fehler δx einen gewaltigen Fehler für Z bedingen. Daher ist es angebracht, die Fehlerfortpflanzung schon vor der Messung der Einzelgrößen abzuschätzen, um zu wissen, welche Messungen besonders sorgfältig durchgeführt werden müssen und bei welchen ein großer Messaufwand überflüssig ist.

Zur Herleitung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes wollen wir uns der Einfachheit halber auf eine Funktion $Z = Z(x,y)$ mit 2 Messgrößen x und y beschränken. Setzen wir einmal die Mittelwerte $\overline{x}$, $\overline{y}$ und dann die Werte $\overline{x}+\delta x, \overline{y}+\delta y$ in Z ein, so gibt uns der Unterschied der zugehörigen Z-Werte die Auswirkung der Fehler δx und δy auf Z. Allgemein erhält man den Wert $Z(x+\Delta x, y+\Delta y)$ einer (vernünftigen) Funktion Z, indem man Z in eine Taylor-Reihe um $Z(x,y)$ herum entwickelt:

$$Z(x+\Delta x, y+\Delta y) = Z(x,y) + \frac{\partial Z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial Z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \ldots \tag{8}$$

Sofern die höheren Reihenglieder rasch kleiner werden, kann man diese Reihe nach den linearen Gliedern abbrechen, und wir erhalten für die Differenz der Z-Werte

$$Z(x+\Delta x, y+\Delta y) - Z(x,y) \cong \frac{\partial Z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial Z}{\partial y}\Delta y \tag{9}$$

Für die Größen x und y können wir nun die Mittelwerte $\overline{x}$ und $\overline{y}$ wählen und für die Größen Δx und Δy die Fehler der Mittelwerte δx und δy einsetzen.

Zur Berechnung der oberen Grenze des Schwankungsintervalls von Z bei Schwankungen von x und y innerhalb ihrer Fehlerintervalle müssen wir den pessimistischen Fall annehmen, dass die Beiträge aller Einzelfehler dasselbe Vorzeichen haben, d.h. wir nehmen die Absolutbeträge der Einzelfehler. Die Summe dieser Absolutbeträge liefert dann den Fehler von Z, der konsequenterweise als der absolute Größtfehler bezeichnet wird. Die Vorschrift zur Bildung von ΔZ heißt Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta Z \leq \left|\frac{\partial Z}{\partial x}\delta x\right| + \left|\frac{\partial Z}{\partial y}\delta y\right| \tag{10}$$

Dabei bedeuten $\partial Z/\partial x$ und $\partial Z/\partial y$ die partiellen Ableitungen. Eine partielle Ableitung einer Funktion f von n Variablen wird gebildet, indem man n-1 Variablen als Konstante ansieht.

Dadurch wird f eine Funktion nur einer Variablen und nach dieser wird dann entsprechend den Regeln für Funktionen einer Variablen differenziert.

Wenn die Fehler unendlich klein werden, so stellt Gl. (9) das totale Differential der Funktion Z dar. Man kann also das Fehlerfortpflanzungsgesetz auch dadurch herleiten, dass man in der Formel für das totale Differential einer Funktion die Differentiale der Variablen durch die endlich großen Fehlerintervalle ersetzt. Dieser Näherungsschritt ist erlaubt, da es sich bei der Fehlerrechnung im allgemeinen nur um grobe Wahrscheinlichkeitsaussagen handelt.

Wir haben Gl. (10) für eine Funktion von 2 Variablen angegeben. Entsprechend kann man den Größtfehler einer Funktion f von n Variablen $y_1,\ldots,y_n$ angeben:

$$\Delta f \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i \right| \tag{11}$$

Dieser Fehler hat Ähnlichkeit mit dem durchschnittlichen Fehler der Einzelmessung, man addiert Absolutbeträge. In der Gaußschen Fehlertheorie tritt an dessen Stelle wieder die Wurzel aus der Summe der Quadrate. Das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz lautet

$$\Delta f_G = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i \right)^2} \tag{12}$$

Für einige häufig auftretende Typen von Funktionen lässt sich das Fehlerfortpflanzungsgesetz Gl. (10) vereinfachen.

a) Funktionen, die ausschließlich aus Summen und/oder Differenzen der Variablen bestehen:

$$f = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \,;\; a_i \neq 0$$

Dann erhält man durch Differentiation den Fehler

$$\Delta f \leq | a_1 \, \delta y_1 | + \ldots + | a_n \, \delta y_n | = \sum_{i=1}^{n} | a_i \, \delta y_i | \tag{13}$$

Regel: Der absolute Größtfehler ist gleich der Summe der Beträge der absoluten Einzelfehler, multipliziert mit den Konstanten a_i.

b) Funktionen, die ausschließlich aus Produkten und/oder Quotienten der Variablen y_i mit beliebigen Potenzen m_i bestehen:

$$f = A y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_n^{m_n} = A \prod y_i^{m_i} \,;\; m_i \neq 0$$

Dann erhalten wir durch partielle Differentiation und Division durch den Funktionswert

$$\frac{\Delta f}{f} \leq \left| m_1 \frac{\delta y_1}{y_1} \right| + \ldots + \left| m_n \frac{\delta y_n}{y_n} \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| m_i \frac{\delta y_i}{y_i} \right| \tag{14}$$

Regel: Der relative Größtfehler ist gleich der Summe der Beträge der relativen Einzelfehler, jeder multipliziert mit dem Exponenten der Variablen. Gl. (14) nennt an auch den Produktfehler.

Übrigens ist nicht festgelegt, wie die Fehler δy_i für das Fehlerfortpflanzungsgesetz zu bilden sind; wir haben hier den mittleren Fehler des Mittelwertes gewählt.

4. Fehler einer Funktion

Die angegebene Fehlerfortpflanzungs-Formel erlaubt, für einen mit vorgegebenen Zahlenwerten der Variablen berechneten Funktionswert den Fehler zu bestimmen. Dazu muss die Funktion bereits bekannt sein. Viele Experimente dienen jedoch dazu, die Funktion selbst erst zu finden. Dazu müssen nicht feste Werte der Variablen nachgemessen werden; es interessiert auch nicht der Fehler eines einzelnen Funktionswertes, sondern es stellt sich die Frage nach der aus den Messfehlern resultierenden Ungenauigkeit des funktionalen Zusammenhanges selbst. Einen funktionalen Zusammenhang misst man, indem man Variable schrittweise ändert.

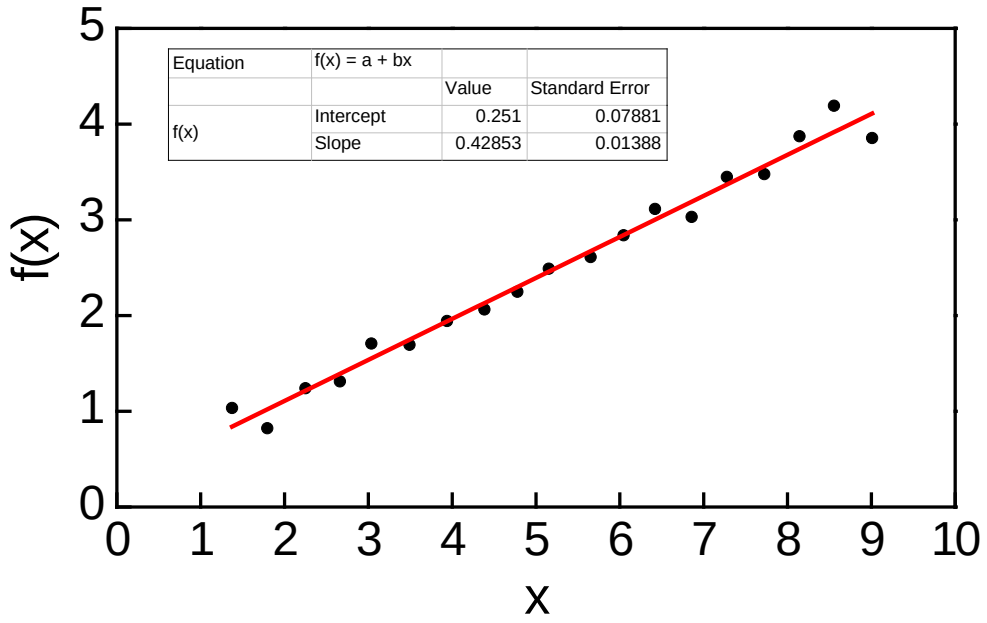

Abb. 1: Messpunkte mit Anpassung (rote Gerade) einer Bestgerade f(x) = a + bx nach der Methode der kleinsten Quadrate mit dem Programm Origin. Die Ergebnisse sind a = 0,25 ± 0,08 und b = 0,43 ± 0,01.

Am Beispiel einer Geraden $f = a + bx$ soll der Fehler einer Funktion untersucht werden. Die Variable x wurde in vorgegebenen Schritten geändert, und die zugehörigen Funktionswerte $f(x)$ wurden gemessen. Dabei sind x_i mit einem Einstellfehler und die f_i mit einem Messfehler beaufschlagt. In einer grafischen Darstellung (Abb. 1 und 2) erkennt man, dass die Punkte (x, $f(x)$) ungefähr einem linearen Zusammenhang gehorchen, wobei aber durch die Fehler bedingte Abweichungen auftreten. Gesucht werden nun die Bestwerte der Konstanten a und b der durch die Punkte verlaufenden Ausgleichsgeraden $f = a + bx$, sowie die Zuverlässigkeit der Konstanten, d.h. deren Fehlerintervall. Die exakte, allerdings aufwendige Methode ist, einen Ausgleich nach der Methode der kleinsten Quadrate vorzunehmen, d.h. die Gerade so zu bestimmen (zu „fitten“), dass die Summe der Quadrate der Abweichungen v_i aller Messpunkte von der Geraden ein Minimum wird. Diese Gerade nennt man dann „Bestgerade“. Als Maß

für den Fehler von *a* und *b* kann man den Verlauf des Minimums bei Variation von *a* und *b* um die Bestwerte herum heranziehen. Abb.1 zeigt eine solche Anpassung unter Benutzung des Programms *Origin*.

Es gibt jedoch eine grafische Methode (Abb. 2), die ohne PC auskommt, allerdings auch nur die Größenordnung der Fehler der Konstanten liefert.

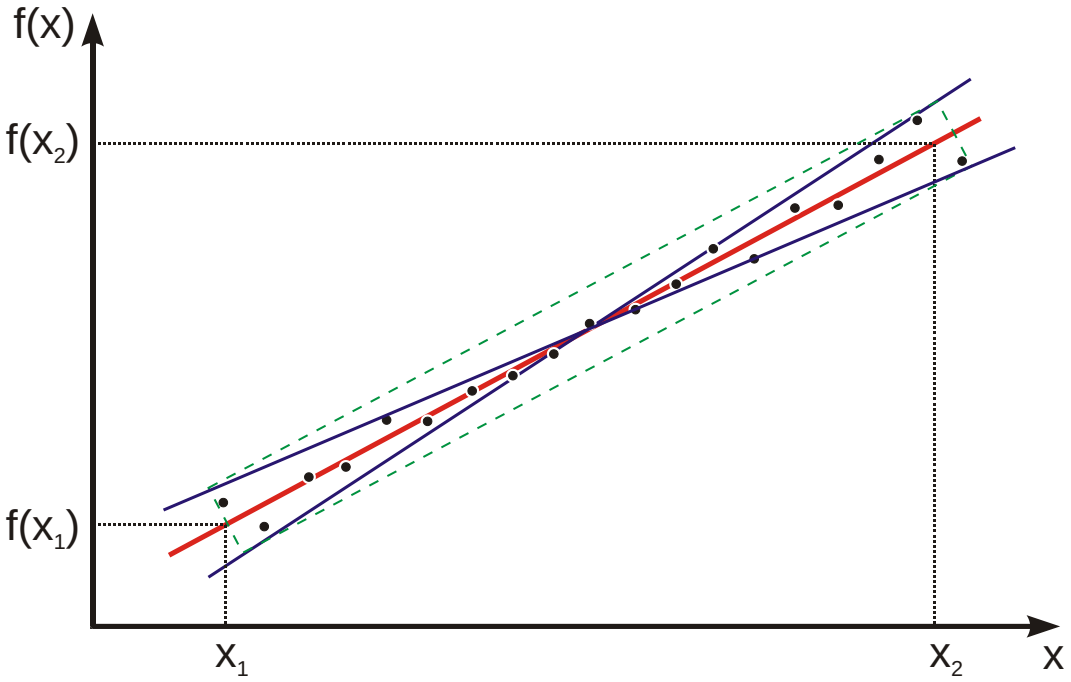

Abb. 2: Messpunkte mit eingezeichneten Best- (rot) und Streugeraden (blau). Die Konstruktion der Streugeraden erfolgte mit einem Hilfsrechteck (gestrichelte Linien).

Dazu zeichnet man die Bestgerade (auch Ausgleichsgerade genannt) nach Augenmaß durch die Messpunkte. Die Konstruktion der Bestgeraden stellt eine Mittelung der Messwerte dar, die mit geeigneten Hilfsmitteln (z.B. ein durchsichtiges Lineal) mit gutem Ergebnis durchgeführt werden kann. Aus zwei Punkten $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ auf der Bestgeraden bestimmt man die Konstanten *a* und *b* und damit die Geradengleichung der Bestgerade.

Zusätzlich zeichnet man - ebenfalls nach Augenmaß - zwei weitere Geraden, die Streugeraden oder Fehlergeraden. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass sie die Geraden maximaler und minimaler Steigung sind, die sich gerade noch mit den Messpunkten vereinbaren lassen (Abb. 2). Wesentlich ist, dass sich Streugeraden und Bestgerade in einem Punkt im Innern des Messintervalls schneiden. Ein Mittel zur Konstruktion der Streugeraden ist ein „Hilfsrechteck“. Dazu konstruiert man ein Rechteck, dessen Seiten parallel und etwa im gleichen Abstand zur Bestgeraden liegen. Das Rechteck sollte möglichst alle Messpunkte umschließen. Die Streugeraden sind dann die Diagonalen des Hilfsrechtecks.

Ein anderes Verfahren zur Bestimmung der Bestgeraden und der Streugeraden geht vom Schwerpunkt der Messwerte aus. Zunächst schätzt man die Lage des Schwerpunktes ab (z.B. nimmt man die Mittelwerte der x_i und der y_i) und markiert ihn in der Zeichnung. Dann sticht man einen Bleistift in den Schwerpunkt und legt das Lineal an die Bleistiftspitze. Nun dreht man das Lineal um die Bleistiftachse, bis die Datenpunkte beidseitig der Lineallinie statistisch gleichmäßig verteilt sind. Damit ist die Bestgerade festgelegt und wird eingezeichnet. Die erste Streugerade erhält man durch weiteres Drehen des Lineals bis auf der einen Seite der Drehachse alle Datenpunkte oberhalb und auf der anderen Seite unterhalb des Lineals liegen. Für die zweite Streugerade vertauscht man ‚oberhalb‘ und ‚unterhalb‘. Da der Schwerpunkt

innerhalb des Datenbereichs liegt, kreuzen sich auch Bestgerade und Streugeraden innerhalb des Datenbereichs.

Nun kann man von den Streugeraden die Konstanten a_{max}, b_{max} bzw. a_{min}, b_{min} bestimmen und die Differenzen dieser Werte geben uns ein Maß für die Genauigkeit der Werte der Bestgeraden mit a_{best}, b_{best}. Als Streumaße für die Konstanten der Bestgeraden führen wir ein:

$$\Delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2} \;\; ; \;\; \Delta b = \frac{b_{max} - b_{min}}{2} \tag{15}$$

Der Faktor 1/2 ergibt sich daraus, dass die Fehler als ± halbe Fehlerintervallbreite angegeben werden. Dieses grafische Verfahren ist wegen der ziemlich willkürlichen Wahl der Streugeraden ziemlich ungenau, liefert aber die richtige Größenordnung des Anteils der zufälligen Fehler auf besonders einfache Weise.

Sein besonderer Wert liegt darin, dass man es auf andere Funktionstypen erweitern kann. Zwar lassen sich Best- und Streugeraden nur bei einer linearen Funktion zeichnen, man kann aber durch geeignete Variablentransformationen andere Funktionen, etwa Parabeln oder Exponentialfunktionen in lineare Funktionen umformen. Will man überprüfen, inwieweit zwischen den Messgrößen y und x ein bestimmter, nicht linearer, analytischer Zusammenhang $y = f(x)$ besteht, so muss man die Messgrößen so transformieren, das zwischen den transformierten Größen $X = \varphi(x)$ und $Y = \psi(y)$ ein linearer Zusammenhang besteht. Transformiert man die Messwerte in dieser Weise, so zeigt die Streuung der transformierten Größen X, Y um die Bestgerade, wie gut der Zusammenhang $y = f(x)$ erfüllt ist. Dabei ist zu beachten, dass die Konstanten der Geraden und ihre Fehler in die Konstanten der ursprünglichen Funktion rücktransformiert werden müssen.

Beispiel: Die Exponentialfunktion $y = Ae^{Bx}$ wird durch folgende Variablentransformation in eine Gerade überführt:

$$X = x \; ; \quad Y = \ln y$$

Damit ergibt sich

$$Y = \ln(Ae^{Bx}) = \ln A + BX = a + bX$$

und $a = \ln A$ sowie $b = B$.

Um die zeitraubende Transformation der Messwerte zu ersparen, sind „Millimeterpapiere“ im Handel, deren Koordinaten bereits nach bestimmten mathematischen Funktionen transformiert sind. So gibt es für die Exponentialfunktion das Semilogarithmenpapier, dessen Abszisse linear geteilt ist, die Ordinate aber so, dass die einzutragenden Werte an die ihren Logarithmen entsprechenden Stellen kommen. Man erspart sich so das Logarithmieren der Messwerte; auf einem solchen Papier aufgezeichnet, ergibt eine Exponentialfunktion also eine Gerade.