

Physikalisches Grundpraktikum für Physiker/innen

Teil II

Beugung und Interferenz elektromagnetischer Wellen



WWW-Adresse Grundpraktikum Physik: <http://grundpraktikum.physik.uni-saarland.de/>

Kontaktadressen der Praktikumsleiter:

PD Dr. Manfred Deicher
Zimmer: 1.11, Gebäude E 2.6
e-mail: manfred.deicher@tech-phys.uni-sb.de
Telefon: 0681/302-58198

PD Dr. Patrick Huber
Zimmer: 3.23, Gebäude E2.6
e-mail: p.huber@physik.uni-saarland.de
Telefon: 0681/302-3944

Stoffgebiet

- Eigenschaften von Lichtwellen
- Ausbreitung von Wellen
- Interferenz von Wellen
- Beugung an Einfachspalt, Doppelspalt und Lochblende
- Kohärenz von Licht
- Laser und thermische Lichtquellen

Literatur

- P.A. Tipler, G. Mosca, *Physik*
2. Auflage (Elsevier, München 2004)
- Bergmann-Schaefer, *Lehrbuch der Experimentalphysik*
Band 3 Optik, 10. Aufl. (Walter de Gruyter, Berlin 2004)
- D. Gerschke, *Physikalisches Praktikum*
12. Auflage (Teubner, Stuttgart 2001)

Fragen:

1. Was versteht man unter Kohärenz?
2. Was versteht man unter Interferenz?
3. Was versteht man unter Beugung? Wie lauten die Bedingungen für Maxima und Minima der Beugungsfigur am Einfachspalt?
4. Wie verändert sich das Bild der Einfachspaltbeugung
 - a. beim Übergang zu beliebig feinen Spaltbreiten bzw. zu beliebig großen Wellenlängen (Gleichung (4.6))?
 - b. beim Übergang zu beliebig großen Spaltbreiten bzw. zu beliebig kleinen Wellenlängen?
5. Warum ist der Spalt als Spektrometer ungeeignet?
6. Wieso beobachtet man bei der Spaltbeugung auf dem Bildschirm in der zur x-Richtung senkrechten Richtung keine Beugungsfigur, die der in der x-Richtung ähnlich ist?
7. Wie sieht das Fraunhofersche Beugungsdiagramm eines Doppelspaltes aus, wenn
 - a. die Spaltbreite sehr klein gegen den Abstand der Spalte ist?
 - b. Spaltbreite und Spaltabstand übereinstimmen? (Skizze)
8. Wie sieht die Beugungsfigur eines Vielfachspaltes (Strichgitters) aus?
9. In welche Bildfigur wird eine ∞ -ferne Punktlichtquelle in der Brennebene eines Fotoapparates oder Fernrohres abgebildet?
10. Strahlaufweitung eines Laser-Strahles: In Abb.16 ist der optische Aufbau eines Strahlaufweilers dargestellt. Berechnen Sie, um welchen Faktor der Strahlquerschnitt eines Laser-Strahls vergrößert wird, wenn sich die Brennweiten der beiden Linsen wie $f_1:f_2 = 1:5$ verhalten?
11. Was besagt das Babinetsche Theorem?

Grundlagen

1a) Typischer Aufbau eines Beugungsexperimentes

Im vorliegenden Versuch wird die Aufgabe gestellt, die Auswirkungen seitlicher Begrenzungen (endliche Größe der Spalte, Linsen, Lichtquellen etc.) auf das reale optische Experiment zu untersuchen. Hierzu ist ein Strahlengang geeignet, der in abgewandelter Form in sehr vielen optischen Instrumenten (z.B. Gitter- oder Prismenspektrograph) wiederkehrt (Abb. 1a).

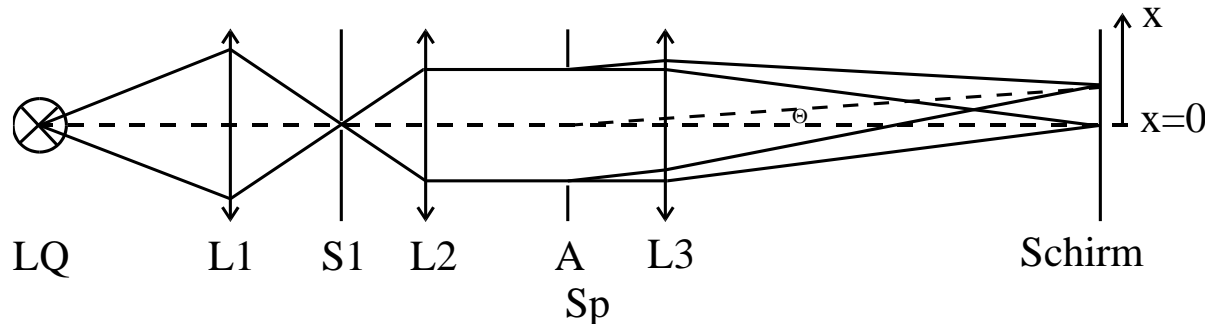


Abb. 1a: Typischer Aufbau eines optischen Experimentes mit Apertur

Mit Hilfe der Linse L_1 wird die Lichtquelle LQ auf den Spalt S_1 abgebildet. S_1 dient als Sekundärlichtquelle, die in einer Richtung praktisch punktförmig ist (die Erweiterung auf zwei Dimensionen verläuft dann analog dazu). Dies ist die notwendige Voraussetzung für die Erzeugung parallelen Lichtes durch L_2 . L_2 macht alle Strahlen, die von dem „punktförmigen“ Spalt S_1 ausgehen, parallel. Diese werden dann nach Durchgang durch den Spalt A (der die Apertur simulieren soll und in einem optischen Experiment durch ein Prisma oder Gitter ersetzt wird) durch die Linse L_3 auf den Schirm abgebildet.

Im Idealfall ∞ -großer Lichtbündel, d.h. unter Vernachlässigung der seitlichen Begrenzung in A, erscheint auf dem Schirm ein beliebig scharfes Bild des Spaltes S_1 . Da die Ausdehnung von A jedoch immer endlich ist, wird das Licht am Spalt A gebeugt und das Bild von S_1 erscheint auf dem Schirm infolge dieser Beugungsfigur unscharf. In einem realen Versuch erscheinen natürlich, bedingt durch die Begrenzungen der Linsen, immer Beugungsfiguren auf dem Schirm, es soll nur hier der Einfachheit halber davon ausgegangen werden, dass die Größe des Spaltes A kleiner ist als die Größe der Linsen.

1b) Fraunhoferbeugung und Fresnelbeugung

Zur Beschreibung des in Abb. 1a skizzierten Experimentes machen wir folgende Voraussetzungen:

1. Die einfallende Lichtwelle ist eben, d.h. die Welle besitzt in allen Punkten der Beugungsebene die gleiche Phase.
2. Betrachten wir einen Punkt P auf dem Schirm, so überlagern sich in diesem alle Wellen, die den Spalt (die Beugungsebene) unter dem gleichen Winkel verlassen (parallele Strahlen, Abb. 1b).

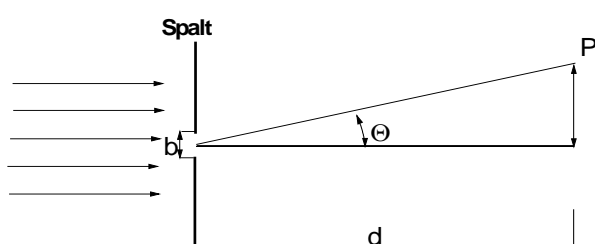


Abb. 1b: Darstellung der Voraussetzungen 1. und 2.

Letzteres bedeutet, dass sich der Aufpunkt P weit entfernt vom Spalt befindet, d.h. in der sogenannten „Fernzone“. Diese ist dadurch bestimmt, dass das Produkt aus der Entfernung d und der Wellenlänge des Lichtes sehr groß sein muss gegen die Größe des Spaltes, projiziert auf die Beobachtungsrichtung (Beobachtungswinkel Θ):

$$d \cdot \lambda \gg \left(\frac{1}{2} b \cos \Theta \right)^2 \geq \frac{b^2}{4} \quad (1.1)$$

Beugung, die unter den Voraussetzungen 1. und 2. beobachtet wird, heißt **Fraunhofer-Beugung**.

Da die Voraussetzung 2. nicht immer erfüllt ist, kann man die Superposition paralleler Strahlen durch eine weitere Sammellinse gewährleisten. Diese bildet alle Strahlen, die parallel zueinander unter einem Winkel Θ auf die Linse treffen, in einen Punkt in ihrer Brennebene ab.

Ist eine der beiden Voraussetzungen 1. oder 2. nicht erfüllt, so erhält man andere Beugungsdiagramme, man spricht dann von **Fresnel-Beugung** (Abb. 2). Diese Beugungsfiguren sind mathematisch komplizierter zu behandeln.

Die erste Voraussetzung wird immer in sehr guter Näherung erfüllt, wenn Laser als Lichtquelle verwendet werden. Man muss allerdings beim Versuchsaufbau immer darauf achten, dass auch die zweite Voraussetzung in Form obiger Ungleichung erfüllt ist.

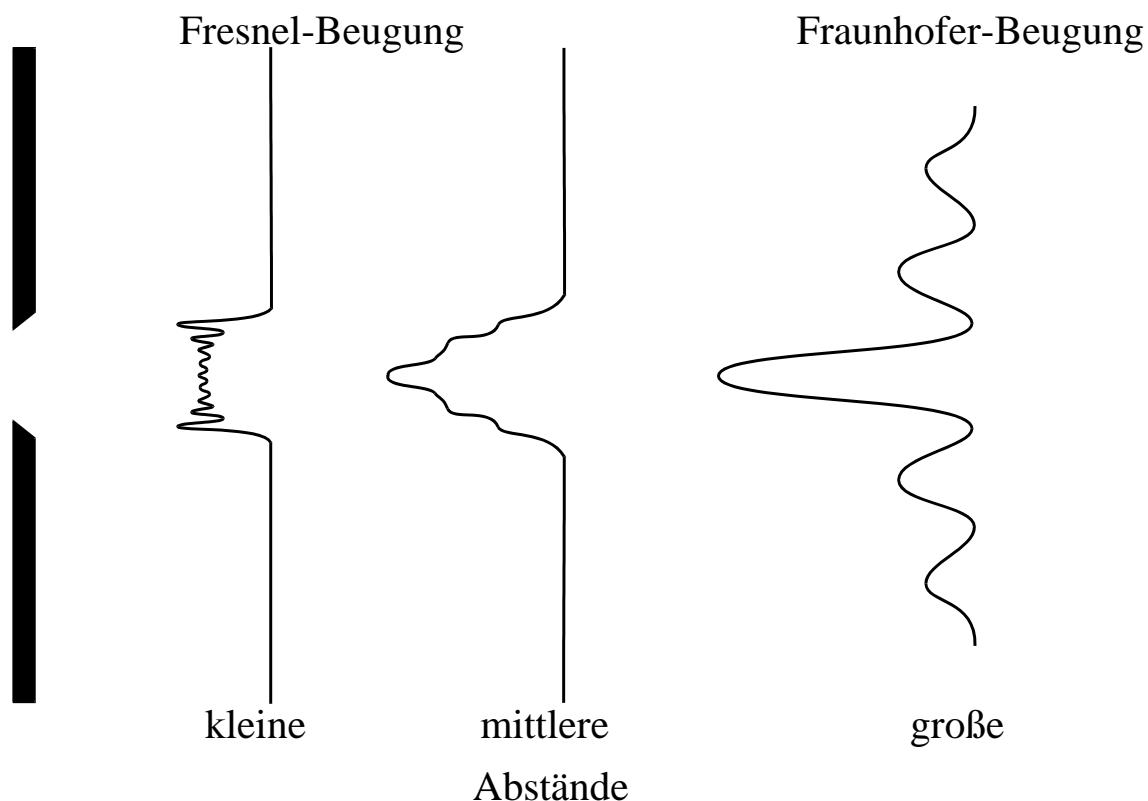


Abb.2: Skizzenhafte Darstellung der Fraunhofer- und Fresnelbeugung für verschiedene Abstände des Beobachters von der Beugungsebene.

2. Mathematische Beschreibung einer monochromatischen ebenen Welle in einem homogenen Medium

Im Folgenden werden wir uns auf reelle Brechungsindizes n , reelle Wellenvektoren \vec{k} und linear polarisiertes Licht beschränken. Reelle Brechungsindizes und Wellenvektoren bedeuten eine Vernachlässigung der Dämpfung der Welle (z.B. durch Absorption).

Vektor des elektrischen Feldes:	$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$
Vektor des magnetischen Feldes:	$\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E})$
Wellenvektor und Wellenlänge:	$ \vec{k} = k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c}$
Brechungsindex des Mediums:	$n = n(\omega)$
Kreisfrequenz, Frequenz und Periodendauer:	$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$
Dispersionsrelation der Welle:	$\omega = \frac{ck}{n}; \quad n = n(\omega)$
Wellenfläche (Ebenen gleicher Phase $\perp \vec{k}$):	$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}$
Transversalität der Welle:	$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$
Lineare Polarisation:	Richtung von \vec{E}_0 fest
Energiestromdichte ("Intensität") der ebenen Welle (zeitl. Mittelwert des Poynting-Vektors):	$\langle \vec{S} \rangle = I \frac{\vec{k}}{k} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \propto (\vec{E}_0 \vec{E}_0^*) \vec{k}$

3. Ebene Wellen und Wellenpakete

Eine (homogene) ebene Welle ist in der Richtung senkrecht zum Wellenvektor \vec{k} , streng genommen, unendlich ausgedehnt. Sie beschreibt also keine reale physikalische Situation. In jedem Strahlengang gibt es Begrenzungen, d.h. eine laterale Struktur. Beugungsexperimente machen heißt, diejenigen Abwandlungen des idealen Zustandes hervorzuheben, zu beobachten und zu messen, die durch laterale Begrenzungen entstehen. Der ideale Ausgangszustand ist bei diesen Experimenten eine ebene Welle mit räumlich konstanter Amplitude:

Die Welle hinter dem Spalt hat keine einheitliche Ausbreitungsrichtung und Amplitude mehr, sie ist durch Pakete von ebenen Wellen zu beschreiben. Mathematisch bedeutet das eine Entwicklung nach ebenen Wellen:

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x) \cdot e^{i(k_x x + k_z z)} dk_x; \quad k_x^2 + k_z^2 = k^2 \quad (3.1)$$

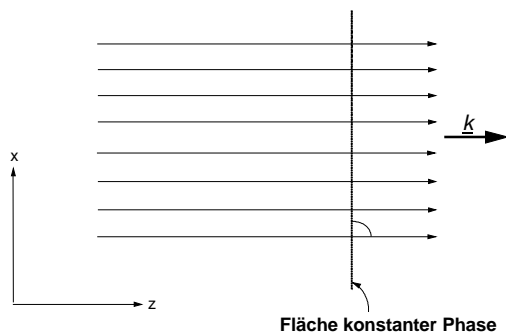


Abb. 3: Ausgangssituation einer unendlich ausgedehnten ebenen Welle

Wir können uns dabei auf das ebene Problem (Koordinatensystem xz) beschränken, da die Spalte in y -Richtung groß sind, und lassen den allen Wellen gemeinsamen Zeitfaktor $\exp(-i\omega t)$ weg. Außerdem betrachten wir nur eine Polarisationsrichtung, z.B. die Komponente E_x .

Diese Beschreibung der Beugung nennt man „Fourier-Methode“. Die Entwicklung der Beugungswelle muss dabei aber nicht notwendigerweise nach ebenen Wellen erfolgen, ebenso ist eine Entwicklung nach Kugelwellen möglich. Auf diesem Formalismus beruht die üblicherweise in den Lehrbüchern geschilderte Methode des **Huygensschen Prinzips** und der Huygensschen „Elementarwellen“. Diese werden in Abschnitt 4.2 skizziert.

Anmerkung

Die Fourier-Optik ist ein sehr aktuelles Gebiet der Physik mit vielen technologischen Anwendungen, so dass es sinnvoll erscheint, Begriffe der Fourier-Optik schon im Grundpraktikum einzuführen. Ihre Methoden werden auch in der Anleitung zum Versuch "Beugung am Gitter und Bildentstehung im Mikroskop" verwendet.

4.1 Beugung am Spalt (Fourier-Methode)

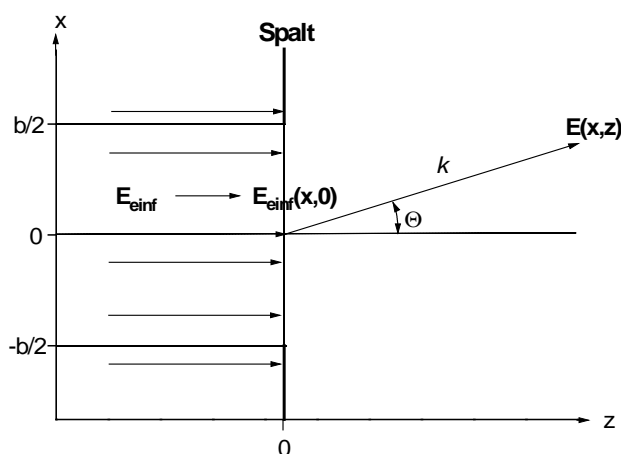


Abb. 4: Prinzipskizze

Ausgangssituation sei eine ebene Welle, die von links senkrecht auf den Spalt zuläuft (Abb. 4). Der Spalt sei in y -Richtung unendlich groß ausgedehnt. Für die ebene Welle können wir dann folgenden Ansatz machen:

$$E_{\text{einf}}(x, y, z) = E_{\text{einf}}(z) = E_0 e^{ikz}$$

Für die Feldverteilung in der Spaltebene ($z = 0$) ergibt sich dann:

$$E_{\text{einf}}(x, z = 0) = \begin{cases} E_0 & \text{für } |x| < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{für } |x| > \frac{b}{2} \end{cases} \quad (4.1)$$

Für den Halbraum $z > 0$ hinter dem Spalt setzen wir ein Wellenpaket aus ebenen Wellen gleicher Frequenz, aber unterschiedlicher Richtung in der xz -Ebene (d.h. unterschiedlichen Komponenten k_x) an:

$$E(x, z > 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x) e^{i(k_x x + k_z z)} dk_x ; k_x^2 + k_z^2 = k^2 \quad (4.2)$$

Die Amplitudenfunktion ist zunächst beliebig.

Für die Spaltebene gilt dann speziell: ($z = 0$)

$$E(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x) e^{ik_x x} dk_x \quad (4.3)$$

Die Integralgleichung (4.3) stellt ein Fourier-Integral dar, die Amplitudenfunktion der ebenen Wellen hinter dem Spalt ergibt sich also in Abhängigkeit von der Impulskomponente k_x als Fourier-Transformierte der Feldverteilung in der Spaltebene. Dieser Zusammenhang gilt ganz allgemein, ist also unabhängig von der Geometrie des Experimentes:

$$A(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, 0) e^{-ik_x x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\text{einf}}(x, 0) e^{-ik_x x} dx \quad (4.4)$$

Das Wellenpaket (4.3) muss die Randbedingung (4.1) erfüllen, d.h. stetig an die ebene Welle vor dem Spalt anschließen. Daraus folgt zum einen, dass die Welle an allen Punkten in der Beugungsebene die gleiche Phase besitzt, und zum anderen, dass das Feld außerhalb der Spaltebene identisch Null verschwindet. Die Integration in (4.4) muss sich daher nur über die Spaltbreite erstrecken:

$$A(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} E_0 e^{ik_x x} dx = \frac{E_0 b}{2\pi} \cdot \frac{\sin(k_x b / 2)}{k_x b / 2} \quad (4.4')$$

Nach Abb. 4 gilt $k_x = k \sin \Theta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \Theta$. Daraus folgt dann mit (4.4'):

$$A_{\text{Spalt}}(\Theta) = A_0 \frac{\sin(\pi b / \lambda \sin \Theta)}{\pi b \sin \Theta} \quad (4.5)$$

(4.5) ist die bekannte Formel für das Fraunhofersche Beugungsdiagramm eines Spaltes. Man kann es sichtbar machen durch eine hinter dem Spalt angebrachte Sammellinse, die alle zu einem Winkel Θ (bzw. zu einem k_x) gehörenden ebenen Wellen in einem Punkt auf der Brennlinie (x -Achse in Abb. 6) sammelt.

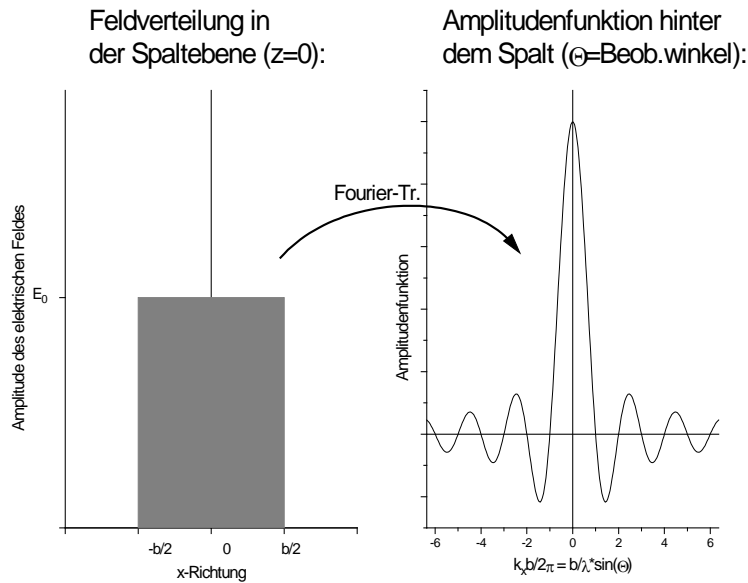
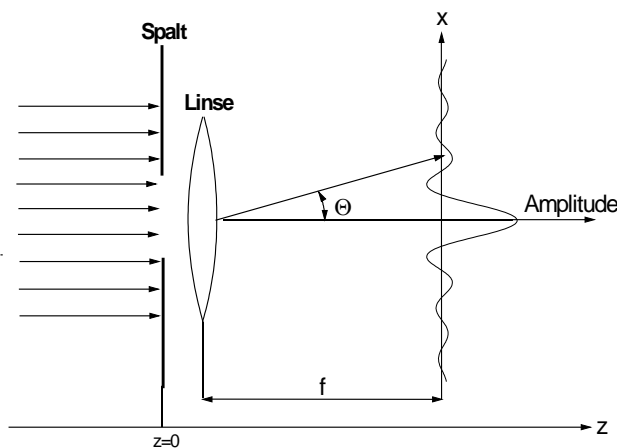


Abb. 5: Darstellung der Feldverteilung in der Spaltebene (links) und der Amplitudenfunktion, die sich durch Fourier-Transformation aus der Feldverteilung im Spalt ergibt (rechts).

Abb. 6: Aufbau zur Beobachtung des Fraunhoferschen Beugungsdiagrammes



Grenzen der Beschreibung

Als Integrationsgrenzen für k_x haben wir bei dem Wellenpaket (4.3) $\pm\infty$ zu wählen. Nur dann ist das Fourier-Theorem exakt anwendbar. In unserem Fall kann aber k_x wegen $k_x = k \sin\Theta$ nicht größer als k werden. Die Beschreibung ist also nur gut, wenn bei dieser Grenze die Amplitudenfunktion schon sehr klein ist, so dass man die Integration schon bei $\pm k$ abbrechen kann, ohne einen großen Fehler zu machen.

Wir können $A(k_x = k)$ leicht abschätzen. Es gilt:

$$\left| \frac{\sin(k \cdot b / 2)}{k \cdot b / 2} \right| \leq \frac{1}{k \cdot b / 2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{b}$$

Der maximale Wert von $A(k_x)$ ergibt sich andererseits nach (4.4') zu $A(k_x=0)$, so dass unsere Beschreibung also nur gut ist, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

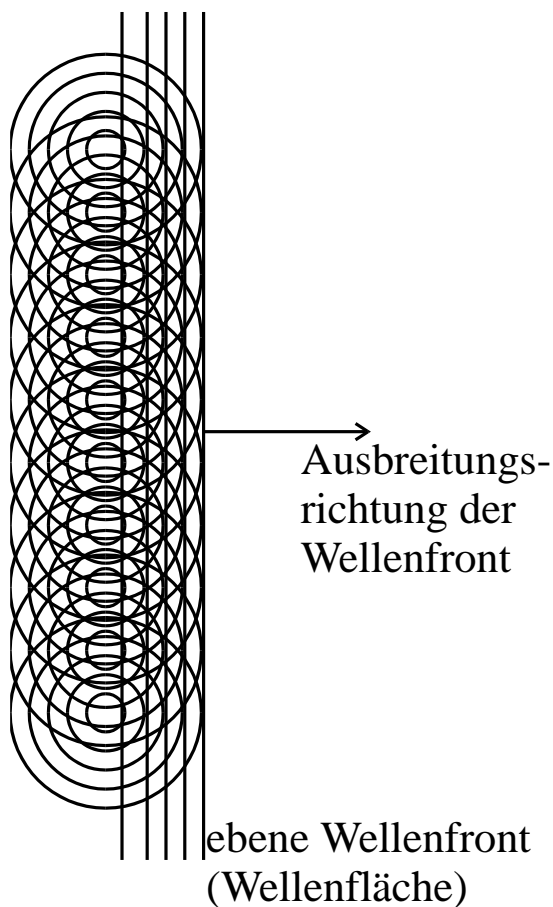
$$\frac{A(k_x = k)}{A(k_x = 0)} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{b} \ll 1 \rightarrow b \gg \lambda$$

und nicht, wie bisweilen zu lesen, $b \geq \lambda$.

4.2 Beugung am Spalt (Huygenssches Prinzip)

Nach dem Huygensschen Prinzip stellt jeder von einer beliebigen Welle getroffene Raumpunkt selbst eine Quelle einer sekundären Kugelwelle („Elementarwelle“) dar, die solange emittiert wird, wie die Primärwelle einfällt. Die weiterlaufende Welle ergibt sich als Überlagerung solcher Kugelwellen (s. Abb. 6a). Dem entspricht eine mathematische Entwicklung einer Welle nach Kugelwellen. Betrachten wir eine ebene Welle: Wegen der auslöschenden Interferenzen in allen Richtungen, die von der Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle abweichen, bleibt diese Wellenform bei der Ausbreitung erhalten.

Abb. 6a: Huygensches Prinzip



Anders ist dies, wenn durch einen Spalt ein eng begrenzter Bereich der ebenen Welle ausgeblendet wird. Denkt man sich den mit einer ebenen Welle beleuchteten Spalt in Abb. 2 mit unendlich vielen Ausgangspunkten Huygensscher Elementarwellen belegt, die kohärent auslaufen, so löschen sich die Anteile der Kugelwellen, deren Ausbreitungsrichtung nicht mit der Fortpflanzungsrichtung der Primärwelle zusammenfällt, nicht mehr alle durch Interferenz aus. Die aus der Überlagerung der Kugelwellen folgende Amplitudenverteilung in der Brennebene der Linse (Abb. 6) ist auch in dieser Beschreibungsweise gegeben durch Gl. (4.5).

4.3 Intensitätsverteilung hinter dem Spalt

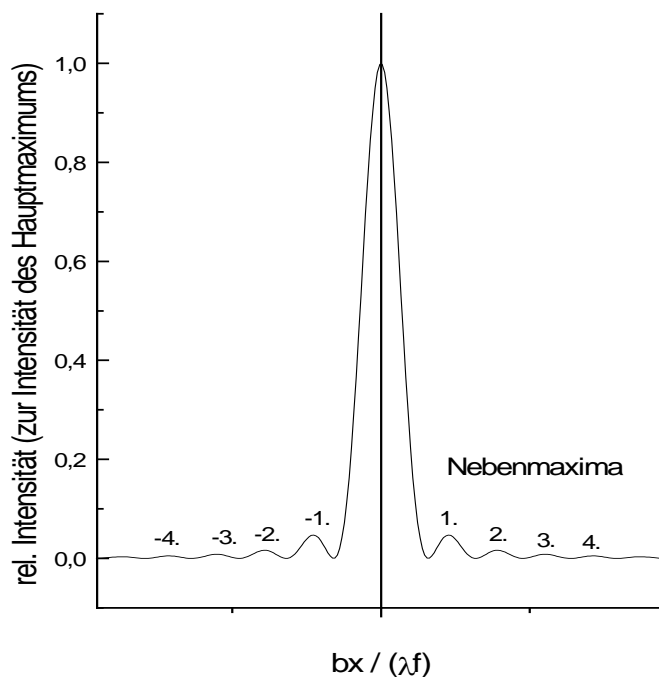
In unserem Experiment wird die Intensität I , d.h. das Quadrat der Amplitudenfunktion, gemessen. Die Intensitätsverteilung in der Brennebene der Linse L (Abb. 6) in x -Richtung ist aus der Amplitudenverteilung nach Gl. (4.5) zu berechnen.

Sie wird in guter Näherung wie folgt beschrieben:

$$I(x) = (A \cdot b^2) \cdot \frac{\sin^2(\pi bx / (\lambda f))}{(\pi bx / (\lambda f))^2} \quad (4.6)$$

Hierbei ist A eine Konstante, b die Breite des Spaltes und f die Brennweite der Linse. Die Näherung liegt darin, dass $\sin\Theta = x/f$ gesetzt wurde (Abb. 6). Die Herleitung obiger Gleichung findet man z.B. in Bergmann-Schäfer, Bd.3.

Abb.7: Intensitätsverteilung hinter dem Spalt.



Die periodische Funktion (4.6) hat an verschiedenen Orten x Maxima und Minima. Die Minima liegen an den Stellen $bx/(\lambda f) = n$, wobei n eine ganze Zahl (außer der Null) ist. Die Intensität ist an diesen Stellen Null (Abb. 7).

Die Maxima liegen an den Orten x , für die gilt: $bx/(\lambda f) = 0$ oder $bx/(\lambda f) = (2m+1)/2$, wenn m ebenfalls eine ganze Zahl ist. Die Zahlen n bzw. m bezeichnet man als Ordnung der Minima respektive Maxima. Der zusätzliche Fall $x = 0$ (d.h. $\Theta = 0$, ungebeugter Strahl) heißt das Maximum 0-ter Ordnung.

Interessiert man sich nicht für die Intensitäten, sondern nur für die Lage der Extrema, so ist eine einfache Berechnung möglich. Man benötigt nur die Kenntnis der Gangdifferenzen zwischen den einzelnen Bündeln, die von verschiedenen Orten der Spaltöffnung ausgehen. Aus-

löschung tritt in den Richtungen ein, in denen die Randstrahlen die Phasendifferenz $n\lambda$ haben, Maxima bei Phasendifferenzen $(2m+1)\lambda/2$. Dies kann man sich einfach geometrisch oder anhand der Intensitätsverteilung klarmachen: Da der Sinusterm im Zähler die Extrema bestimmt, geben seine Nullstellen die Lage der Minima und seine Maxima die Lage der entsprechenden Maxima an.

Somit ergibt sich für die Beugungswinkel, unter denen man Minima beobachten kann

$$n\lambda = b \cdot \sin \Theta \quad (4.7a)$$

und für die Orte auf dem Schirm in der Näherung $\sin \Theta = x/f$:

$$n\lambda = b \cdot \frac{x}{f} \quad (4.7b)$$

Entsprechend gilt für die Beugungswinkel der Maxima:

$$\frac{(2m+1)}{2} \lambda = b \cdot \sin \Theta \quad (4.8a)$$

und für die Orte auf dem Schirm:

$$\frac{(2m+1)}{2} \lambda = b \cdot \frac{x}{f} \quad (4.8b)$$

Hinweis

Die Beschreibung der Beugung am Einfachspalt und Doppelspalt (Kap. 5) mit Hilfe des Huygensschen Prinzips sollten Sie unbedingt beherrschen, insbesondere die Gleichungen (4.7) und (4.8) herleiten können.

Das Huygenssche Prinzip bei der Ausbreitung von Wellen wird Ihnen noch häufig in der Physik begegnen (z.B. bei der Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallen / Kristallstrukturanalyse oder der Beugung von Elektronen an Kristallen / elektronische Eigenschaften von Festkörpern). Auch zur Heisenbergschen Unschärferelation bietet das Experiment der Beugung am Spalt einen anschaulichen Zugang. Letzteres kann Ihnen der Assistent genauer erläutern.

5. Beugung am Doppelspalt

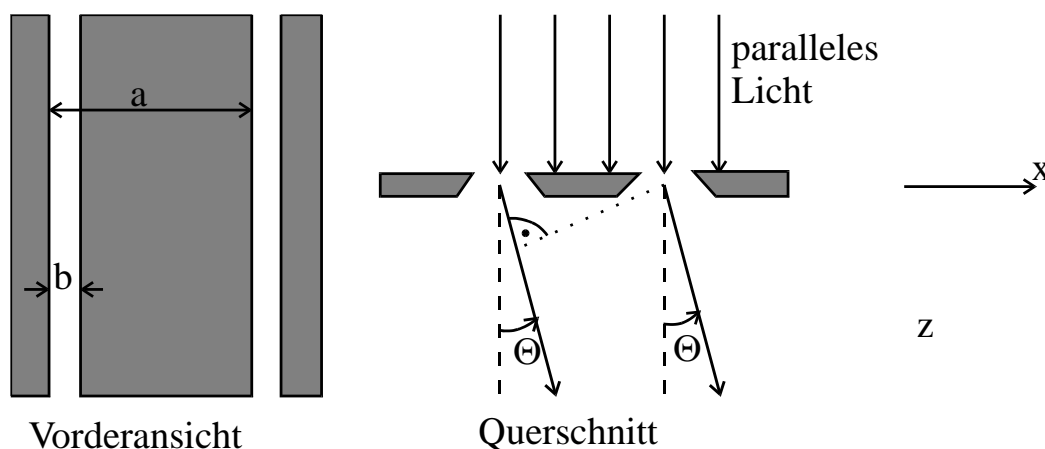


Abb. 8: Geometrie eines Doppelspaltes.

Die Feldverteilung in der Spaltebene hat bei Beleuchtung mit einer ebenen Welle folgendes Aussehen:

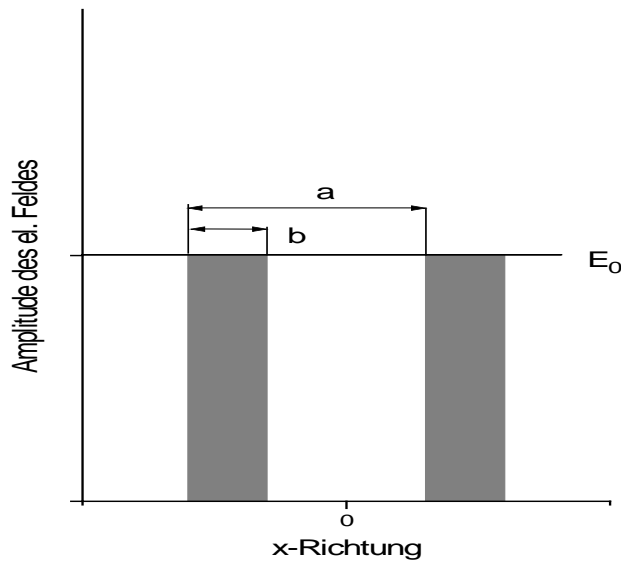


Abb. 9: Feldverteilung in einem Doppelspalt

Das nun entstehende Fraunhofersche Beugungsdiagramm ist wieder durch die Fourier-Transformierte der Feldverteilung gegeben. (Es ergibt sich natürlich ebenfalls im Rahmen der Huygensschen Betrachtungsweise - machen Sie sich bitte damit vertraut.)

Der Doppelspalt verdeutlicht besonders gut das Zusammenspiel von Beugung und Interferenz: Bringt man wieder, wie in Abb. 6, eine Sammellinse hinter den Spalten an, so setzt sich die resultierende Feldamplitude in ihrer Brennebene (das Fraunhofersche Beugungsdiagramm) zusammen aus den resultierenden Amplituden eines jeden Einzelspaltes (Gl.(4.5)). Da Kohärenz zwischen den beiden Teilwellen vorausgesetzt wird, addieren sich die Amplituden, nicht die Intensitäten.

Da für Winkel $\Theta \neq 0$ die beiden Teilwellen wegen der unterschiedlichen geometrischen Weglängen eine Phasendifferenz besitzen, kommt es zusätzlich zur Einzelspaltbeugung zu einer weiteren Interferenzerscheinung, die das Beugungsdiagramm gegenüber dem des Einzelspaltes wesentlich verändert. Wir geben hier nur die Intensitätsverteilung an, sie ergibt sich zu:

$$I(\Theta) = I_0 \left[\frac{\sin((\pi b / \lambda) \sin \Theta)}{(\pi b / \lambda) \sin \Theta} \right]^2 \cos^2((\pi a / \lambda) \sin \Theta) \quad (5.1)$$

Die aus Gl.(5.1) resultierenden Maxima sind gegeben durch die Maxima des Interferenzterms

$$m\lambda = a \sin \Theta \cong a \frac{x}{f}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2a)$$

und die Minima der Einhüllenden durch die Beugung am Einfachspalt

$$n\lambda = b \sin \Theta \cong b \frac{x}{f}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2b)$$

Hierbei wurde wieder von der Näherung $\sin \Theta \approx x/f$ Gebrauch gemacht. Die Herleitung der Gleichungen (5.2a) und (5.2b) mit Hilfe des Huygensschen Prinzips müssen Sie beherrschen.

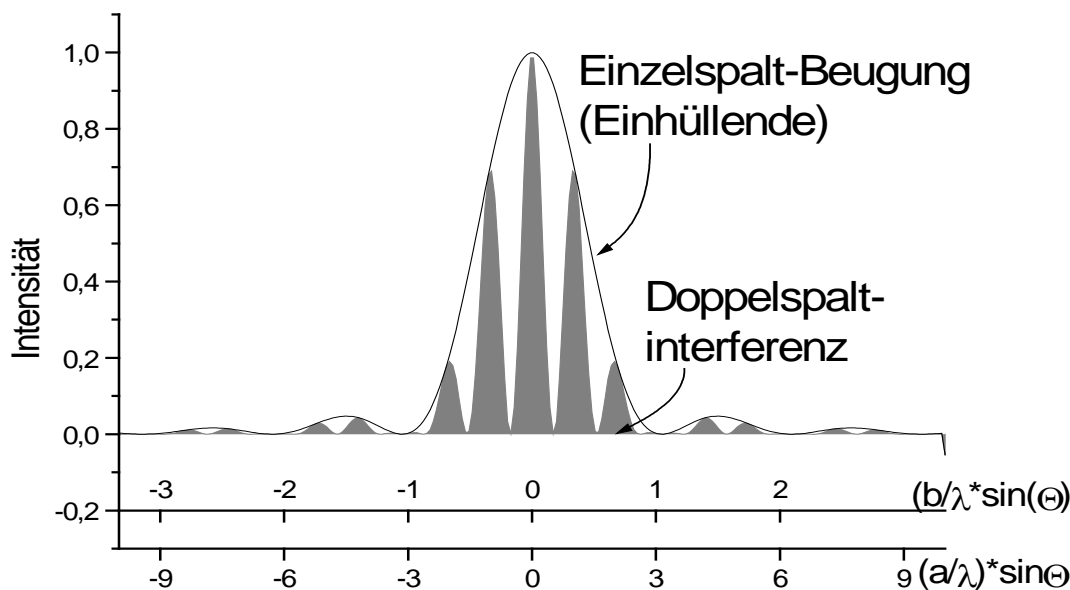


Abb. 10: Intensitätsverteilung hinter einem Doppelspalt (Fraunhofer-Beugung) für den Fall $a=3b$.

6. Beugung an einer kreisförmigen Öffnung

Das Beugungsdiagramm einer kreisförmigen Öffnung ist qualitativ dem eines Spaltes ähnlich, jedoch besteht es aufgrund der Zylindersymmetrie der Öffnung aus einer zentralen Scheibe und konzentrischen, alternierend dunklen und hellen Ringen. Die Berechnung des Beugungsdiagrammes ist mathematisch komplizierter, da Beugung in alle Richtungen senkrecht zur z-Achse betrachtet werden muss. Dieses 2-dimensionale zylindersymmetrische Problem wird mittels Zylinderfunktionen, den sogenannten Bessel-Funktionen, gelöst.

Aufeinanderfolgende Maxima und Minima sind nicht äquidistant, wie es beim Einzel- oder Doppelspalt der Fall ist. Für das erste Minimum gilt

$$\sin \Theta = \chi \frac{\lambda}{D} \quad (6.1)$$

wobei D der Durchmesser der kreisförmigen Öffnung und χ ein Zahlenfaktor ist, der hier nicht angegeben werden soll (diese Faktoren sind als erste Nullstellen der Besselfunktionen tabelliert). Sie sollen ihn in der ersten Aufgabe selbst messen.

Beugung an kreisförmigen Öffnungen tritt bei allen optischen Abbildungssystemen mit kreisförmigen Linsen und Blenden auf und führt dazu, dass die nach der Geometrischen Optik mögliche exakte Abbildung prinzipiell unscharf wird („Beugungsunschärfe“).

Aufgabe 1

Man zeige, dass Gl. (4.6) für $x = 0$ ein Maximum annimmt.

Aufgabe 2:

Man berechne die relativen Intensitäten der Maxima 1., 2. und 3. Ordnung, bezogen auf die des Hauptmaximums $I(x = 0)$ nach Gl. (4.6). Hierzu setze man

$$\frac{\pi bx}{\lambda f} = \alpha\pi \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$$

Gleichung (4.6) erhält dann die Form

$$\frac{I(x)}{I(x=0)} = \frac{\sin^2(\alpha\pi)}{(\alpha\pi)^2}$$

Die Aufgaben 1. und 2. sind Hausaufgaben, die bei der Versuchsvorbereitung zu lösen sind.

Aufgabe 3: Einfachspalt

Man prüfe experimentell:

1) Gl. (4.6): $I(x) = I_0 \frac{\sin^2(\alpha\pi)}{(\alpha\pi)^2}$

2) Gl. (4.7b): $n = \alpha$ für $n = 1, 2, 3$

3) Gl. (4.8): $\frac{2m+1}{2} = \alpha$ für $m = 1, 2, 3$

mit $\alpha = \frac{bx}{\lambda f}$, n und m sind die Ordnungszahlen der Minima bzw. Maxima, $I_0 = Ab^2$ ist die Intensität des Hauptmaximums.

Versuchsdurchführung

Verwendet man als Lichtquelle LQ eine räumlich ausgedehnte thermische Lichtquelle, so wird der Spalt S_1 in Abb. 1 von verschiedenen Punkten von LQ aus beleuchtet. Als Effekt hiervon tritt durch ihn kein völlig kohärentes Licht mehr hindurch, wodurch Gl. (4.6) nicht mehr exakt gilt, und der Kontrast der Beugungsfigur herabgesetzt wird. Man überschreitet in solch einem Fall die Kohärenzlänge des verwendeten Lichtes. Als Folge dieser Überschreitung addieren sich nicht mehr die Amplituden der superponierenden Wellen (da sie keine feste Phasenbeziehung zueinander besitzen), sondern ihre Intensitäten. Das Auftauchen von Interferenzerscheinungen setzt aber eine feste Phasenbeziehung der Teilwellen voraus, so dass thermische Lichtquellen im allgemeinen für Interferenzexperimente in dieser geometrischen Größenordnung, d.h. mit Gangunterschieden im cm-Bereich, ungeeignet sind. Hinzu kommt, dass die Linse L_1 aufgrund der endlichen Breite des Spaltes S_1 kein exakt paralleles Licht erzeugt.

Diese Schwierigkeiten kann man vermeiden, wenn man bei der Durchführung solcher Experimente Laser als Lichtquellen verwendet. Laser-Licht erzeugt man in einem optischen Resonator hoher Güte. Es ist zu einem hohen Grade parallel und besitzt große Kohärenzlängen (bis zu mehreren Metern). Da sich dadurch zusätzlich noch die Verwendung des Spaltes S_1

erübrigt, vereinfacht sich der Strahlengang der Abb. 1. Die Wellenlänge des hier verwendeten Lichtes (aus einem He-Ne-Laser) beträgt $\lambda = 632.8\text{nm}$.

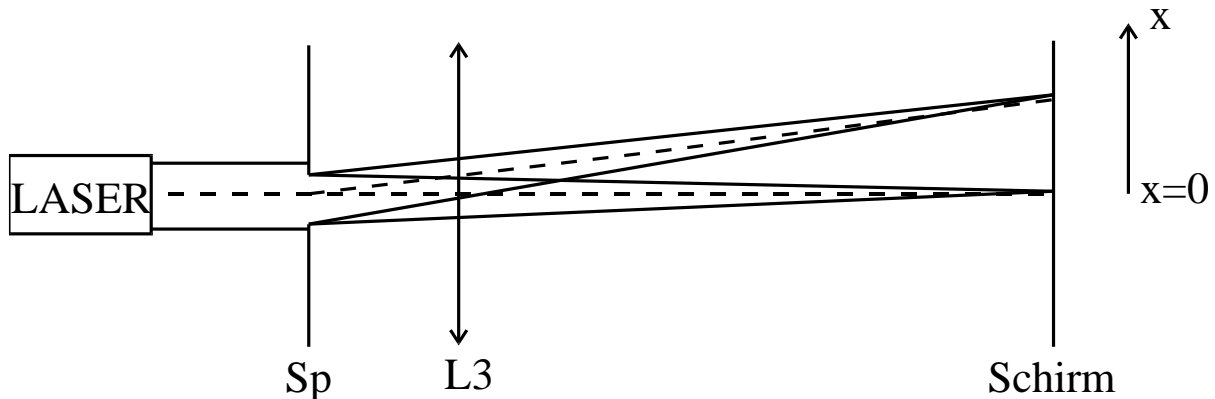


Abb. 11: Strahlengang bei der Durchführung des Beugungsexperimentes

Noch weiter vereinfachen lässt sich der Aufbau von Abb. 11, wenn der Schirm sehr weit vom Spalt entfernt ist. Dann treten auch ohne Fokussierung durch L_3 einzelne voneinander getrennte Teilbündel auf (Fernfeld). Die Brennweite f muss dann in den Formeln durch den Abstand d zwischen Spalt und Schirm ersetzt werden (Abb. 12).

Ihre Aufgabe ist es nun, das Fraunhofersche Beugungsdiagramm eines Spaltes der Breite b (bitte beim Betreuer erfragen) aufzunehmen. Die folgende Skizze der Versuchsanordnung dient der Definition der Messgrößen:

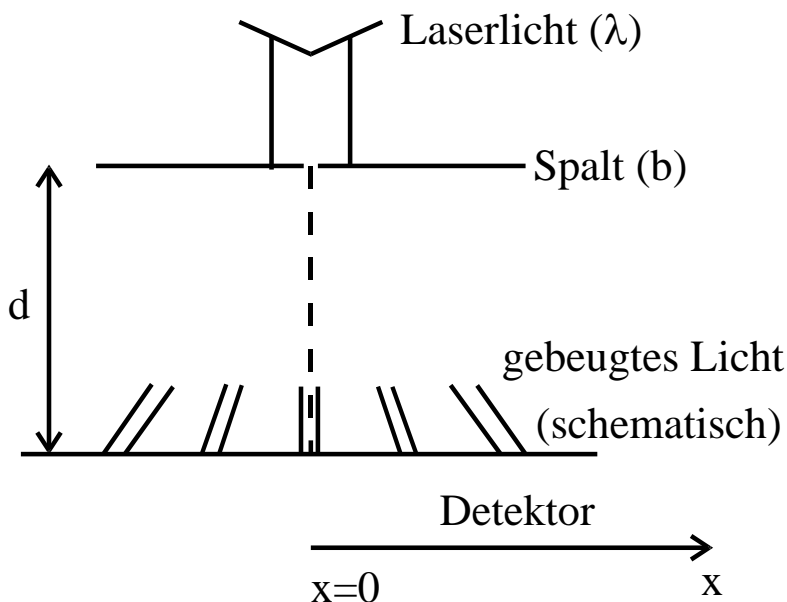


Abb. 12: Skizze der Versuchsanordnung.

Die Intensität wird mit einem Photowiderstand in Abhängigkeit von dessen Position (x) gemessen. Er befindet sich in einem Gehäuse, das mittels einer Drehspindel in x -Richtung bewegt werden kann. Optional kann vor dem Detektorgehäuse ein weißer Schirm angebracht werden, damit die Intensitätsverteilung direkt beobachtet werden kann. Der Abstand der Detektor- bzw. Schirmebene d ist so groß zu wählen, dass auf eine Linse verzichtet werden kann. Der Ort x des Detektors ist an einer mm-Skala und (für die mm-Bruchteile) an der Mikrometerschraube abzulesen.

Justieren Sie zunächst den Spalt so, dass er vom Laser-Licht symmetrisch beleuchtet wird. Beobachten Sie dann das Beugungsbild auf dem Schirm und justieren Sie das Detektorgehäuse in der Höhe so, dass bei Verschiebung über die ganze x-Skala das gebeugte Licht stets durch das Loch im Schirm auf den Photowiderstand fallen kann (Abb. 13).

Der Photowiderstand darf nie in den direkten Laser-Strahl gebracht werden, da er sonst zerstört werden kann.

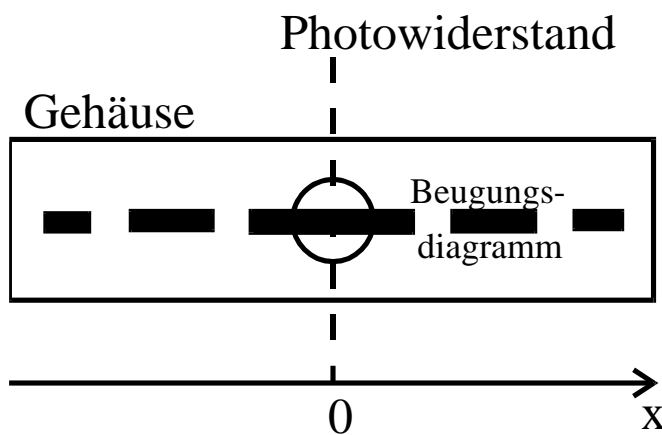


Abb. 13: Justage des Detektors.

Sowohl Intensität als auch die Position des Detektors auf der x-Skala werden elektrisch gemessen und mit einem Sensor-CASSY auf einem PC aufgezeichnet: Zur elektrischen Erfassung der x-Position ist am Detektor ein Linearpotentiometer angebracht, an dem eine zur Verschiebung proportionale Spannung abgegriffen wird (Abb. 14a).

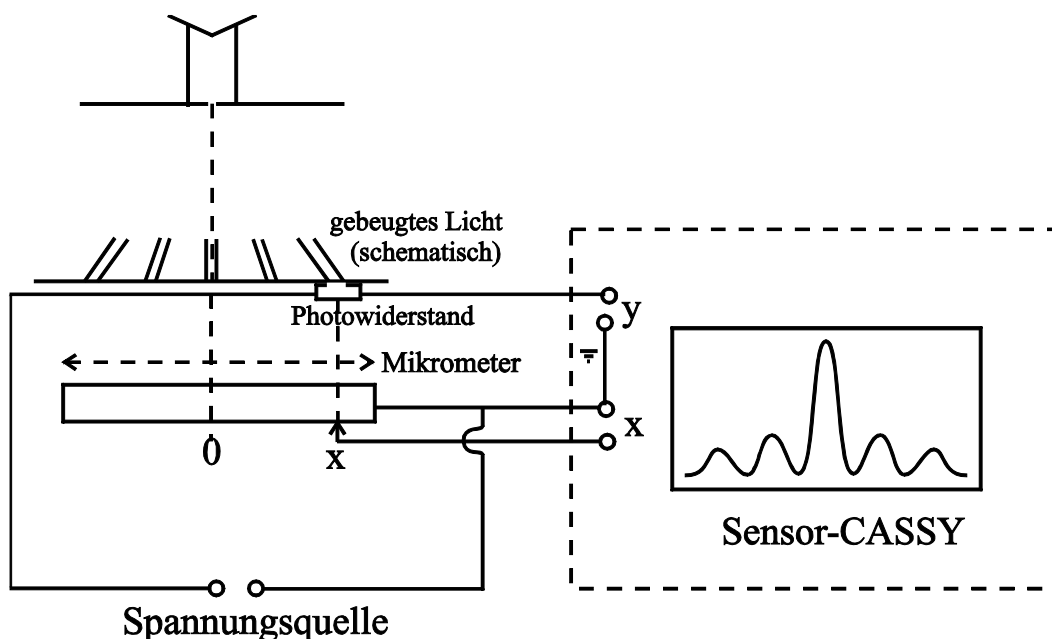


Abb. 14a: Prinzip des Versuchsaufbaus.

Über das CASSY wird als „x-Position“ die Spannung über den Mittelabgriff des Linearpotentiometers erfasst, die proportional zur Position des Detektors ist. Über den 2. Eingang des CASSY wird der Spannungsabfall über den Photowiderstand erfasst, der ein Maß der gemessenen Lichtintensität ist. Abb. 14b zeigt die Verdrahtung des Messaufbaus. Eine vom CASSY ausgegebene Spannung (maximal 16 V) versorgt sowohl den Schiebewiderstand als auch (über einen Vorwiderstand von 500 Ω) den Photowiderstand.

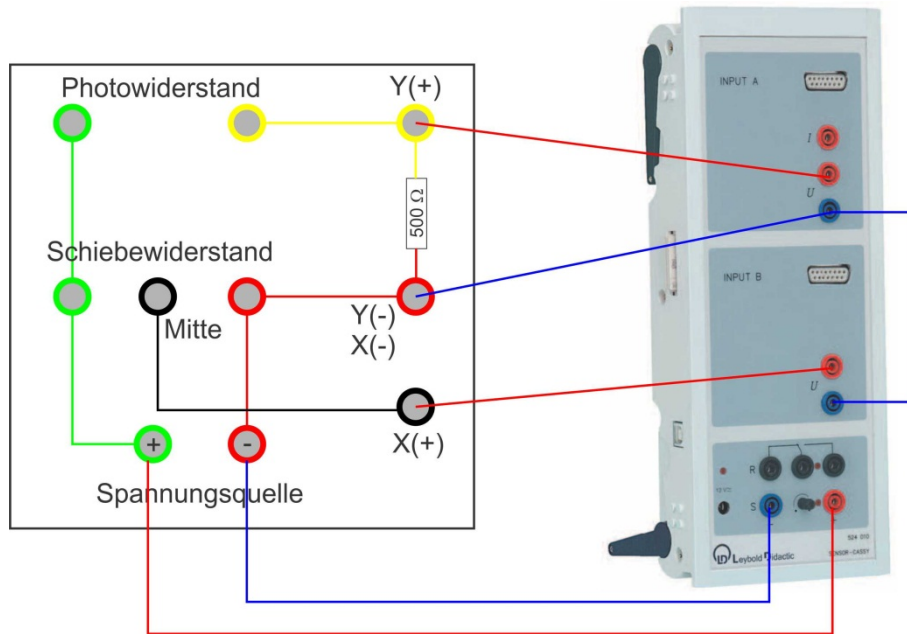


Abb. 14b: Elektrischer Schaltplan des Versuchsaufbaus.

Nach Justage des Aufbaus sollen mit dem Programm „CASSY LAB 2“ die ersten 10 Maxima und Minima auf beiden Seiten des Hauptmaximums gemessen werden. Dazu muss der Detektor in die Position des Hauptmaximums gefahren und der Messbereich des CASSY in y-Richtung so angepasst werden, dass der Ausschlag im Hauptmaximum gerade dem Vollausschlag entspricht. Zur Optimierung kann auch die vom CASSY ausgegebene Spannung verändert werden.

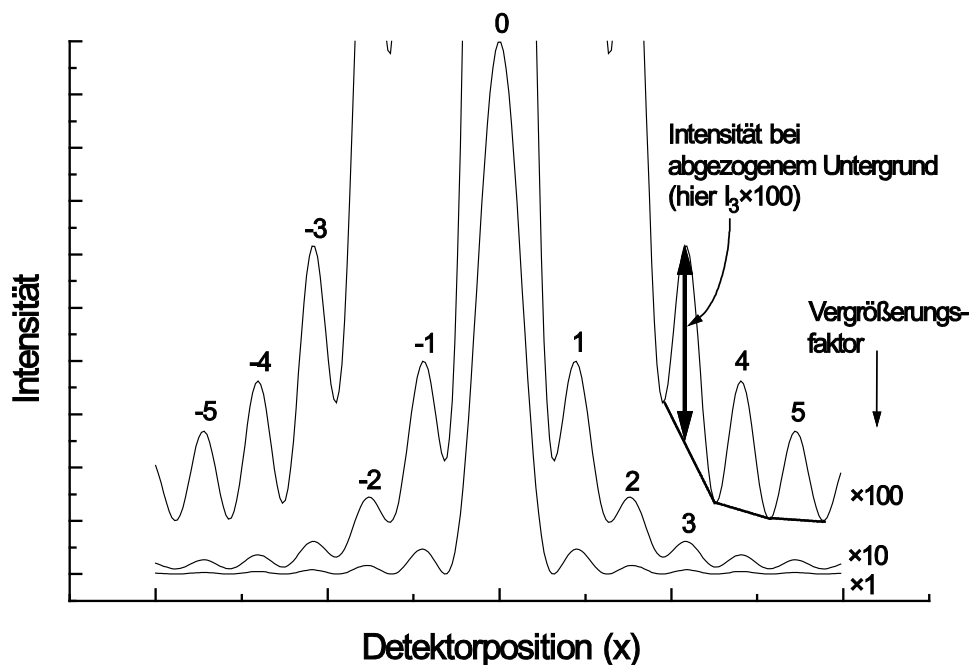


Abb. 15: Messergebnis dargestellt mit verschiedenen Verstärkungsfaktoren.

Zur Umrechnung der Spannung am Schiebewiderstand in eine x-Position müssen Sie zunächst eine Eichung der Detektorposition durchführen. Messen Sie dazu in 5 mm Schritten über den gesamten Bereich des Schiebewiderstands den entsprechenden Spannungsabfall. Mit diesen Wertepaaren können Sie im Programm „Origin“ eine Ausgleichgerade berechnen, die

Sie später für die Umrechnung der gemessenen Spannungen in Positionen benutzen können. Vorsicht: Da der Schiebewiderstand und der Photowiderstand über eine gemeinsame Spannungsversorgung angeschlossen sind, erfordert jede Änderung dieser Spannung eine erneute Kalibrierung der x-Position. Das „ideale“ Messergebnis ist in Abb.15 dargestellt.

Auswertung

Prüfen Sie den Intensitätsverlauf der Gleichung (4.6). Die Intensitäten $I_m(x_m)$ der Maxima werden, wie in Abb. 15 gezeigt, bestimmt. Der inkohärente Untergrund muss vor der Bestimmung der einzelnen Intensitäten durch lineare Interpolation abgezogen werden (gestrichelte Kurve bei I_3 rechts in Abb. 15). Führen Sie dies für alle Ordnungen von -10 bis +10 durch und bilden Sie für jedes $|m|$ den Mittelwert

$$I_{|m|} = \frac{I_{+|m|} + I_{-|m|}}{2}$$

Stellen Sie dann graphisch $\ln\left(\frac{I_0}{I_{|m|}}\right)$ als Funktion von $\ln\left(\frac{2|m|+1}{2}\right)$ für $1 \leq |m| \leq 10$ dar.

Zeichnen Sie gestrichelt die theoretisch zu erwartende Kurve nach Gl. (4.6) für die Maxima in das Diagramm. Vergleichen Sie Messung und Theorie und diskutieren Sie das Ergebnis. Ist die gemessene Spannung am Photowiderstand tatsächlich proportional zur einfallenden Lichtintensität?

Prüfen Sie die Positionen der Minima und Maxima. Dazu bestimmen Sie die Orte der Minima und Maxima für $|m| = 1..10$ als Mittelwerte der Positionen der Extrema positiver und negativer Ordnung:

$(x = 0) =$ Position des Hauptmaximums

$$\text{Minima: } x_{|m|} = \frac{x_{+|m|} - x_{-|m|}}{2}$$

$$\text{Maxima: } x_{|m|} = \frac{x_{+|m|} + x_{-|m|}}{2}$$

Fertigen Sie eine Tabelle an und stellen Sie dann die Orte als Funktion der Ordnungszahlen $|n|$ bzw. $|m|$ graphisch dar. Bestimmen Sie die Steigungen und Achsenabschnitte der Geraden durch die Messpunkte. Berechnen Sie die theoretischen Steigungen und Achsenabschnitte (Gln. (4.7b) und (4.8b)) und vergleichen Sie diese mit den experimentell erhaltenen Messpunkten.

Aufgabe 4: Doppelspalt

Bestimmen Sie Spaltbreite b und Spaltabstand a eines Doppelspaltes. Hierzu wird der Versuchsaufbau etwas abgeändert, da der Laser-Strahl aufgeweitet werden muss, um den Doppelspalt gleichmäßig zu beleuchten.

Der Strahlaufweiter besteht aus einem kurzbrennweitigen Objektiv L_1 ($f_1 = 30$ mm) und einer längerbrennweitigen Linse L_2 ($f_2 = 140$ mm). Die Justierung der Linsen und die gleichmäßige Beleuchtung des Doppelspaltes ist etwas schwierig, lassen Sie sich vom Betreuer helfen. Bevor Sie den Detektor D in den Strahlengang einsetzen, beobachten Sie die Beugungs-Interferenz-Figur auf dem Schirm S. Die Messung erfolgt wie in Aufgabe 3.

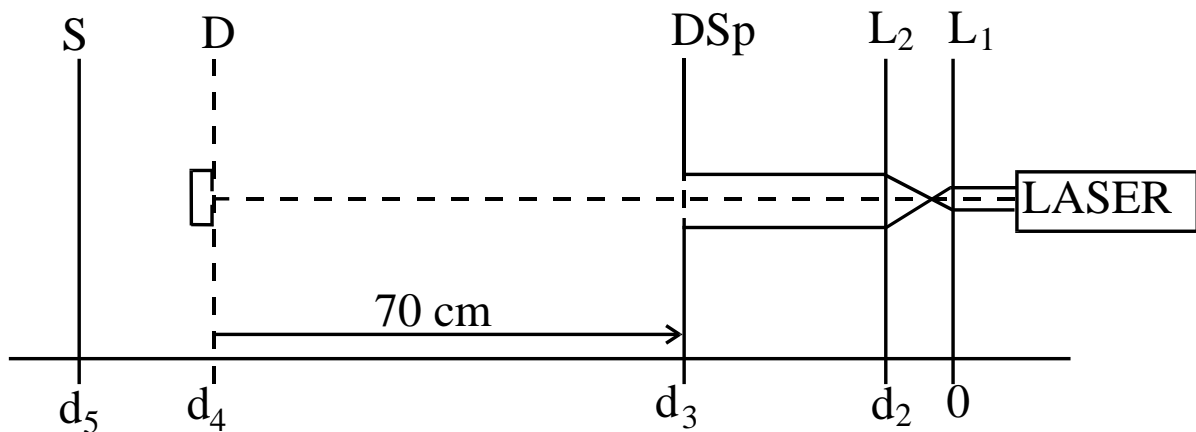


Abb. 16: Aufbau des Strahlaufweilers.

Überlegen Sie sich selbst, wie man die gesuchten Größen a und b aus der Messkurve ermitteln kann.

Aufgabe 5: Beugung an einer kreisförmigen Öffnung

Nehmen Sie photoelektrisch das Fraunhofersche Beugungsdiagramm einer kreisförmigen Öffnung (Durchmesser $\Delta = 0.12$ mm) auf und bestimmen Sie den Zahlenfaktor χ in der Gleichung für das erste Minimum:

$$\sin \Theta_{\text{Min}} = \frac{\chi \lambda}{\Delta}$$

Hinweis:

Der Abstand zwischen beugender Öffnung und Photodetektor muss groß sein, damit der mit einer schlitzförmigen Blende versehene Detektor die Beugungsringe einzeln registrieren kann.

Anmerkungen zum realen Beugungsexperiment:

Bisher haben wir nur die ideale Feldverteilung in der Ebene der beugenden Objekte betrachtet, d.h. eine unstetige Hell-Dunkel-Grenze am Rande der Öffnung und eine konstante Helligkeit in der Öffnung. Eine „Verschmierung“ der Hell-Dunkel-Grenze, z.B. durch allmählich zunehmende Schwärzung des Randes, bedingt durch mechanische Fehler oder durch Verschmutzung des Öffnungsrandes, ändert die Beugungsfigur.

Das zentrale Maximum wird breiter, die Nebenmaxima werden schwächer (Stichwort Apodisation). In unserem Experiment haben diese Effekte nur geringen Einfluss; wesentlicher ist die nicht konstante Feldamplitude des Lasers senkrecht zum Strahl. Diese hat im Fall der Ein-

Moden-Anregung (d.h. der Anregung der ersten stehenden Welle im optischen Resonator) den in Abb. 17 gezeigten Verlauf.

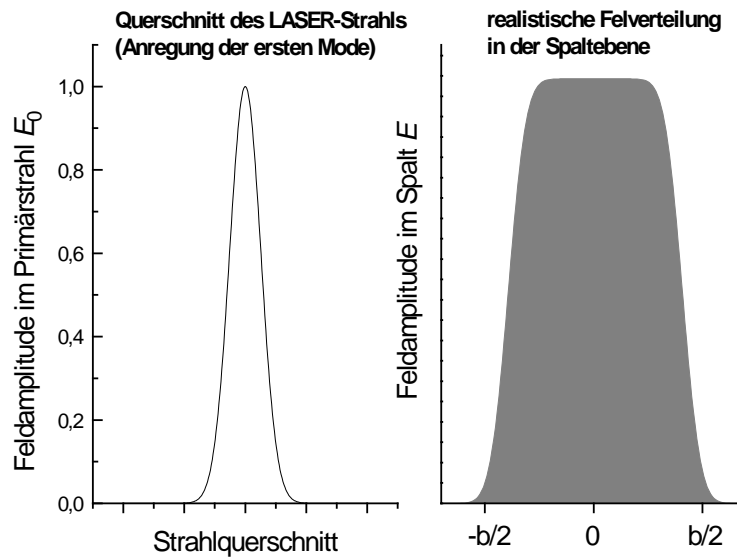


Abb. 17: Realistische Feldverteilung im Querschnitt des Laser-Strahls und in der Spaltebene

Die Feldverteilung in der Spaltöffnung wird daher sehr ungleichmäßig, wenn der Strahl nicht genau symmetrisch auf den Spalt justiert ist. Als Folge davon unterscheiden sich die Intensitäten der $-|m|$ -ten und $+|m|$ -ten Ordnung. Sie können diesen Effekt sehr leicht selbst beobachten.