

Beugung am Gitter - Auflösung beim Mikroskop

Sichtbares Licht ist eine elektromagnetische Welle mit Wellenlängen von 350 nm(violett) bis 700 nm(rot). Elektromagnetische Wellen werden an Hindernissen gebeugt. Beugungserscheinungen sind oft ein begrenzender Faktor bei der Auflösung optischer Instrumente (Mikroskop oder Fernrohr).

1 Lernziele

- Wellenlängen sichtbares Licht: $\lambda_{\text{violett}} = 400 \text{ nm}$; $\lambda_{\text{grün}} = 530 \text{ nm}$; $\lambda_{\text{rot}} = 700 \text{ nm}$
- konstruktive und destruktive Interferenz von Wellen
- Kohärenzlängen: $\ell_{\text{Sonne, Glühlampe}} \approx \mu\text{m}$; $\ell_{\text{LED-monochrom}} \approx \text{mm}$; $\ell_{\text{Laser}} \approx 30 \text{ cm} - \text{viele km}$
- Gitterkonstante $a =$ Abstand zwischen den Einzelspalten eines Gitters
- numerische Apertur (lat. Öffnung) ist wichtig für die beugungsbegrenzte Auflösung $A_N = n \sin \alpha$ mit α - halber Öffnungswinkel Objektiv, n - Brechungsindex
- Auflösung Mikroskop – Ernst Abbe: $\delta x = \frac{\lambda}{A_N} = \frac{\lambda}{n \sin \alpha}$

2 Experimenteller Aufbau

- Optische Bank mit mm-Skala, Maßband, Messschieber $u(\ell) = 0.1 \text{ mm}$
- grüner Laser mit $\lambda_{\text{Laser}} = 532 \text{ nm}$
- Linsen mit den Brennweiten $f_i = \{16, 50, 100, 200, 2000\} \text{ mm}$,
- ein grobes, ein feines Gitter und einen Schirm
- Fotowiderstand als Lichtsensor am Sensor-CASSY auf einem beweglichem Reiter zur Aufzeichnung der Lichtintensität $I(\Theta)$ als Funktion des Ortes x bzw. der Lichtablenkung Θ
- Kameraobjektiv mit Irisblende als Mikroskopobjektiv

3 Messungen

- a) Bestimmen Sie aus dem Beugungsbild des groben Gitters die Wellenlänge λ des Lasers.
- b) Bestimmen Sie die Gitterkonstante g_{fein} des feinen Gitters. Zeichnen Sie die Intensität $I(\alpha)$ des Beugungsbildes auf.
- c) Bauen Sie einen Mikroskop auf. Bestimmen Sie die Vergrößerung des Mikroskops aus dem Abbild des feinen Gitters. Wie ändert sich das Abbild des Gitters bei der Verkleinerung der numerischen Apertur des Okulares?

4 Versuchsdurchführung

4a) Wellenlänge des Lasers

- Die Einzelspalten des groben Gitters sind mit dem bloßen Auge sichtbar. Messen Sie mit dem Messschieber den Abstand vom ersten bis zum letzten Spalt. Zählen Sie die Anzahl der Spalten auf dem ausliegenden Foto des Gitters. Notieren Sie die Messunsicherheit.
- Ordnen Sie die Linsen den jeweiligen Brennweiten zu, indem Sie diese zum Beispiel als Lupen verwenden.
- Der austretende Laserstrahl hat nur einen Durchmesser von zirka 2 mm. Bauen Sie mit den Linsen $f_{1,2} = (16 \text{ und } 200) \text{ mm}$ einen Strahlaufweiter auf, damit in den folgenden Versuchen viele Spalten des Gitters beleuchtet werden. Variieren Sie den Abstand zwischen den Linsen des Strahlaufweiters von klein nach größer, bis der Strahl möglichst wenig Divergenz zeigt. Positionieren Sie dazu 2 m vor der Projektionswand die Linse $f = 2 \text{ m}$ in den Strahlengang. Wenn der aufgeweitete Strahl auf einen Punkt fokussiert wird, ist das Laserstrahlenbündel vor der Linse divergenzfrei. Welchen Abstand zwischen den Linsen erwarten Sie und welchen Abstand messen Sie?
- Positionieren Sie das grobe Gitter vor der Linse so, dass ein scharfes Beugungsbild entsteht. Markieren Sie auf einem weißen Blatt an der Projektionswand die Positionen des Hauptstrahls (0.

Ordnung) und von möglichst vielen Beugungsmaxima. Bestimmen Sie den Abstand zwischen zwei weit voneinander entfernten Beugungsmaxima. Notieren Sie die Messunsicherheit.

- Zusatz: Wenn Sie die Sammellinse entfernen ist kein scharfes Beugungsbild sichtbar. Wieso? Anstatt der Sammellinse können Sie auch den Abstand zwischen den beiden Linsen des Strahlauflaufers verändern um wieder ein scharfes Beugungsbild zu erhalten – ausprobieren. Wieso ist dies möglich? Kann aus diesem Bild ebenfalls die Laserwellenlänge bestimmt werden? Wenn ja, werden dabei systematische Fehler begangen?
- Werten Sie diesen Versuchsteil aus.

4b) Beugungsintensitäten quantitativ

- Tauschen Sie das grobe Gitter gegen das feine Gitter aus.
- Messen Sie den Abstand zwischen den Beugungsmaxima und dem Hauptstrahl auf dem 2 m entfernten Schirm für eine lineare Regression zur Bestimmung der Gitterkonstanten. Notieren Sie die Messunsicherheit.
- Ersetzen Sie die die Sammellinse mit $f = 2\text{ m}$ durch die Linse mit $f = 100\text{ mm}$ und einen Schirm auf der optischen Bank. Positionieren Sie den Schirm so, dass die Beugungsreflexe scharf abgebildet werden. Welchen Abstand muss der Schirm zur Sammellinse haben? Ersetzen Sie den Schirm durch den beweglichen Lichtsensor, so dass die Reflexe scharf auf dem Sensor im Inneren abgebildet werden.
- Konfigurieren Sie das Programm CASSY Lab 2 so, dass auf der Abszisse (y -Achse) die Spannung der Strahlungsintensität U_I und auf der Ordinate (x -Achse) die positionsabhängige Spannung U_{pos} dargestellt wird. Ermitteln Sie durch probieren die jeweils günstigsten Messbereiche.
- Starten Sie die Messung und bewegen Sie langsam (maximal eine Umdrehung pro Sekunde) und gleichmäßig den Lichtsensor durch das Beugungsbild. Es müssen zumindest die Ordnungen $-1, 0, +1$ aufgezeichnet werden. Die Peaks der Reflexe sind sehr schmal. Vergewissern Sie sich durch eine Wiederholung der Messung, dass Sie den Sensor langsam genug durch die Beugungspeaks bewegt haben, um die maximale Amplitude aufzuzeichnen.
- Kopieren Sie die Datenreihe U_I, U_{pos} in die Zwischenablage und fügen Sie diese in Ihr Datenauswerteprogramm ein.
- Werten Sie diesen Versuchsteil aus.

4c) Auflösung Mikroskop

- Die Vergrößerung eines Mikroskops errechnet sich aus dem Produkt der Vergrößerung (Abbildungsmaßstab) von Objektiv und Okular. Für Sammellinsen ergibt sich diese aus der Brennweite und der Gegenstandsweite. Die Gegenstandsweite des Objektivs ist zirka die Tubuslänge ℓ_{Tubus} und die des Okulars der Abstand der Abbildung ℓ_{Abb} zum Okular. Es ergibt sich

$$V_{\text{theo}} = V_{\text{Obj}} V_{\text{Okul}} \approx \frac{\ell_{\text{Tubus}}}{f_{\text{Obj}}} \frac{\ell_{\text{Abb}}}{f_{\text{Okul}}} \quad (1)$$

Da wir eine starke Vergrößerung erreichen wollen, wählen wir beide Brennweiten recht kurz und die Tubuslänge/Abstand der Abbildung möglichst groß.

- Entfernen Sie alles bis auf das feine Gitter aus dem Strahlengang und bauen Sie aus dem Kameraobjektiv als Objektiv und der Sammellinse $f = 50\text{ mm}$ als Okular ein einfaches Mikroskop auf, um das feine Gitter auf dem Schirm abzubilden. Die Blende im Objektiv soll zu Beginn vollständig geöffnet sein. Da die Brennweite des Objektivs recht klein ist, muss sich das Objektiv dicht am Gitter befinden. Die Okularlinse soll sich am Ende der optischen Bank befinden. Das Objektiv hat den richtigen Abstand zum Gitter, wenn sich die Beugungsreflexe direkt vor dem Okular zu einem Fleck, dem reellen Zwischenbild, vereinen. Dieses wird durch das Okular weiter vergrößert und auf die Wand abgebildet. Bemerkung, die Beleuchtung mit einem Laser führt zu einer sehr inhomogenen Ausleuchtung. Dennoch wird das Gitter deutlich sichtbar.

- Bestimmen Sie den Streifenabstand auf der Projektionswand.
- Schätzen Sie b/a als das Verhältnis von der Breite der Spalten zur Gitterkonstante.
- Schließen Sie die Blende im Objektiv und notieren Sie Ihre Beobachtungen auf der Projektionswand.
- Zusatz: Sie können als Okular auch die Linse mit $f = 16$ mm verwenden, allerdings ist das Bild etwas schwach. Welche Vergrößerung haben Sie nun?
- Werten Sie diesen Versuchsteil aus.

Zusätzliche Versuchsdurchführung

4d) Gitter im Mikroskop

- Zur Betrachtung des feinen Gitters steht ein modifiziertes Lichtmikroskop zur Verfügung. Das $10\times$ Objektiv wurde mit einem seitlichen Schlitz versehen, so dass eine Blende in den Strahlengang eingebracht werden kann. Zusätzlich kann die Beleuchtung mit weißem oder monochromatischem Licht erfolgen.
- Verwenden Sie die Blendenreihe mit den kreisförmigen Öffnungen um die numerische Apertur des Objektivs zu verringern. Was beobachten Sie?
- Verwenden Sie den Farbfilter um monochromatisches Licht zu erhalten. Überlegen Sie sich aus der Orientierung der Streifen Ihres Gitters, die Lage der Beugungsreflexe. Wenn Sie die Reihe mit den Blenden als Schlitzpaare einführen, können Sie selektiv nur einzelne Beugungspaarordnungen durchlassen. Wenn Sie zum Beispiel nur die Reflexe der ± 2 . Ordnung durchlassen, sollte das beobachtete Streifenmuster die doppelte Periodizität, demzufolge den halben Gitterabstand aufweisen.

5 Auswertungen

5a) Wellenlänge des Laser

- Bestimmen Sie die Gitterkonstante a_{grob} des groben Gitters und geben Sie die Messunsicherheit $u(a_{\text{grob}})$ an.
- Berechnen Sie die Wellenlänge λ des Lasers aus dem Abstand zwischen zwei weit entfernten Beugungsordnungen und dem Abstand zwischen der Sammellinse und der Wand. Wieso wird nicht der Abstand Gitter zur Wand verwendet?
- Bestimmen Sie die Messunsicherheit $u(\lambda)$ Ihres Ergebnisses. Dabei darf die Vereinfachung $\sin(\arctan(x/L)) \approx x/L$, für $x \ll L$ benutzt werden. Vergleichen Sie Ihre ermittelte Wellenlänge mit dem Tabellenwert $\lambda_{\text{Laser}} = 532$ nm.

5b) Beugungsintensitäten quantitativ

- Bestimmen Sie aus zwei weit entfernten Beugungsmaxima die Gitterkonstante a_{fein} . Da x durchaus in die Größenordnung von L kommen kann, ist die obige Vereinfachung $\sin(\arctan(x/L)) \approx x/L$ nicht mehr anwendbar. Verwenden Sie als Wellenlänge des Lasers $\lambda_{\text{Laser}} = 532$ nm. Bei der Größfehlerabschätzung für $u(a)$ unter Verwendung von den abgeschätzten $u(L)$ und $u(x)$ können Sie die obige Vereinfachung hingegen verwenden.
- Bestimmen Sie durch lineare Regression die Gitterkonstante a_{fein} aus den Abständen der Beugungsordnungen zum Hauptstrahl. Tragen Sie dazu $y(n)$ auf mit $y_n = \sin(\arctan(x_n/L))$ und der Beugungsordnung n . Ermitteln Sie $u(a)$ aus der angegebenen Unsicherheit des Anstieges.
- Erstellen Sie ein Diagramm der relativen Beugungsintensitäten $I(\sin(\Theta))$. Skalieren Sie die x -Achse Ihres aufgezeichneten Beugungsbilds so, dass die Intensität als Funktion von $\sin \Theta$ dargestellt wird, mit Θ als Winkel zum Hauptstrahl. Nutzen Sie dabei aus, dass sich die ± 1 -Beugungsmaxima bei $\sin \Theta_{\pm 1} = \pm \lambda/a_{\text{fein}}$ befinden. Normieren Sie die y -Achse Ihres Beugungsbilds, so dass die Lichtintensität Ihres Hauptmaximums $I_0 = 1$ beträgt. Bestimmen Sie die relative Lichtintensität der Reflexe mit der ± 1 . Ordnung. Welche relative Intensität hätten die Reflexe der ± 1 . Ordnung, wenn die Breite der Spalten b sehr viel schmaler wäre als die Gitterkonstante a ?

- Zusatz: Berechnen Sie aus der relativen Intensität der ± 1 . Ordnung die Breite der Spalten b .

5c) Auflösung Mikroskop

- Bestimmen Sie die Vergrößerung V ihres Mikroskops aus dem abgebildeten Streifenabstand und der in 5b) bestimmten Gitterkonstante.

6 Vorbereitung, Fragen und Berechnungen vor Versuchsantritt

Erarbeiten Sie sich einen Überblick zu folgenden Schlagwörtern (siehe auch Kap. 7 Literatur und Kap. 8 Zusatzmaterial)

- elektromagnetische Wellen $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$, Wellenlänge λ , Amplitude, Phase, Intensität
- Interferenz von Wellen – konstruktiv/destruktiv
- Was gibt die Kohärenzlänge von Licht an?
- Was besagt das Huygenssches Prinzip?
- Skizzieren Sie ein Reflektionsgitter. Was ist ein Phasengitter?
- Skizzieren Sie den Strahlenverlauf durch ein Transmissionsgitter und tragen Sie die Gitterkonstante a , die Lichtwellenlänge λ , den Ablenkwinkel Θ , den Strahlenverlauf des Hauptstrahls und der 1. Beugungsordnung, den Schirm im Abstand L und den Abstand x_1 des 1. konstruktiven Reflexes zum Hauptstrahl ein. Siehe Kap. 8 Zusatzmaterial.
- Geometrische Optik: Wie müssen die Lichtstrahlen verlaufen, damit sich bei Verlängerung ein reelles bzw. ein virtuelles Bild ergibt. Welches können Sie mit dem Auge sehen und welches auf einem Schirm/Kamerachip abbilden?
- Skizzieren Sie den Strahlengang für eine Sammellinse, wenn die Gegenstandsweite $g < f$ und wenn $f < g < 2f$.
- Skizzieren Sie ein den Strahlengang in einem Strahlaufweiter (Kepler-Fernrohr).
- Welche Brennweite hat ein Objektiv (Sammellinse) mit der Angabe Vergrößerung $10\times$.
- Skizzieren Sie (nicht maßstäblich) den Strahlengang in dem aufzubauenden Mikroskop, wenn das entstehende Bild auf einem Schirm hinter dem Okular abgebildet wird? Siehe auch Abb. O.1.3.3 in [1], wo das reelle Zwischenbild des Objektivs durch das Okular als virtuelles Bild abgebildet wird, um es mit dem Auge zu beobachten.

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben:

- Geben Sie die Grenzwerte von $\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin \beta}{\beta}$ und $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(N\alpha)}{\sin(\alpha)}$ an.
- Berechnen Sie die relativen Abweichungen zwischen der Vereinfachung $x_{\text{app}} \approx x/L$ und dem exakten Wert $x_{\text{exakt}} = \sin(\arctan(x/L))$ mit $x = 30 \text{ cm}$ und $L = 2 \text{ m}$.

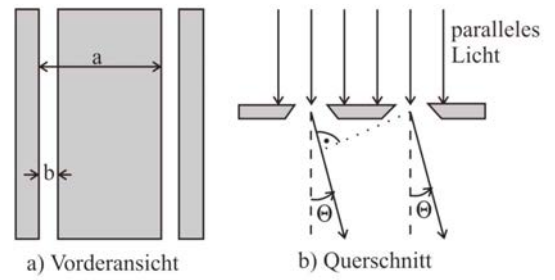
7 Literatur

Das Kapitel O-2-Kohärenz, Interferenz und Beugung in [1] beschreibt die wichtigsten Grundlagen. Die Abbildung O.2.0.4 ist für den Doppelspalt, gilt jedoch auch für das Gitter. Im Kapitel Optik-1.3 finden sie in der Abbildung O.1.3.3 den Strahlengang eines Mikroskopes bei einer Beobachtung mit dem Auge (keine Projektion auf eine Wand).

- [1] W. Schenk und F. Kremer (Hrsg.) *Physikalisches Praktikum*. Springer, 14. Auflage, 2014. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-00666-2>.
- [2] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer, 25. Auflage, 2015. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5>.

8 Zusatzmaterial

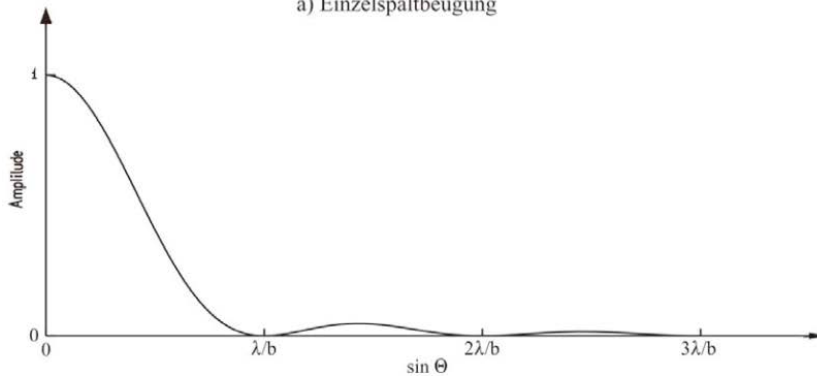
- Aufbau des verwendeten Absorptionsgitters mit der Gitterkonstanten a und der Spaltbreite b .



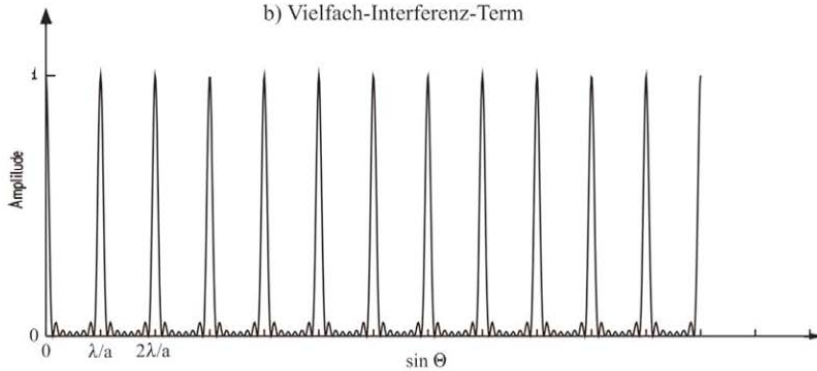
- Die normierte Intensität des Lichtes $I(\Theta)/I_0$ hinter einem Gitter mit der Gitterkonstanten a , der Spaltbreite b und der Anzahl N an beleuchteten Spalten ergibt sich zu:

$$\frac{I(\Theta)}{I_0} = \underbrace{\left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2}_{\text{Einzelspalt}} \underbrace{\left(\frac{\sin(N\alpha)}{N \sin(\alpha)}\right)^2}_{\text{Gitter}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \Theta \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \Theta \quad (2)$$

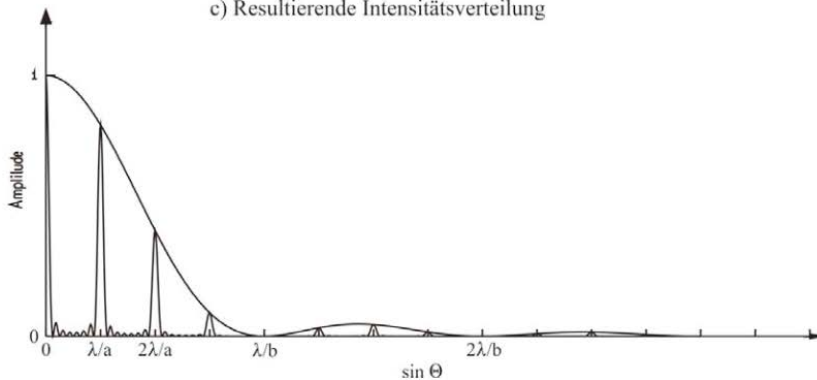
Die Terme sehen im Einzelnen so aus
a) Einzelspaltbeugung



b) Vielfach-Interferenz-Term



c) Resultierende Intensitätsverteilung

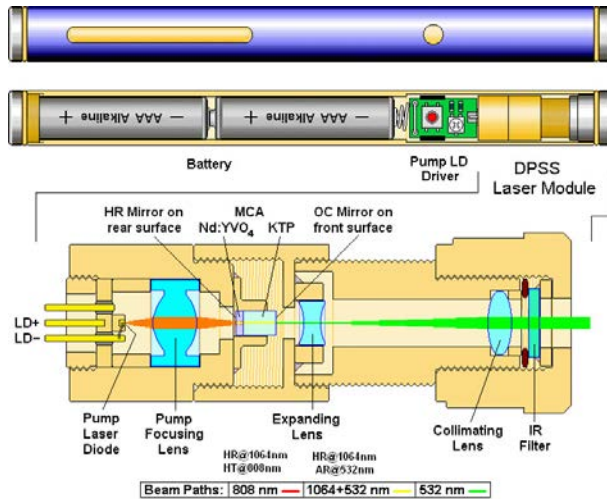


Die erste Beugungsordnung ist somit bei $\sin \Theta_1 = \lambda/a$ und hat eine relative Intensität

$$I_1 = \frac{I(\Theta)}{I_0} \Big|_{\sin \Theta = \lambda/a} = \left(\frac{\sin \beta_1}{\beta_1} \right)^2 \quad \text{mit} \quad \beta_1 = \pi \frac{b}{a} \quad (3)$$

Sie können somit aus I_1 durch (numerische) Umkehrung von $\frac{\sin x}{x} = \text{sinc}(x)$ das Verhältnis b/a und mit der Gitterkonstante aus der Auswertung in 5 die Spaltbreite b bestimmen.

- Ein grüner Laserpointer nutzt einen nichtlinearen Kristall um für ein paar Prozent der Intensität des infraroten Laserlichtes die Frequenz zu verdoppeln auf $\lambda_{\text{Laser}} = 532 \text{ nm}$. Siehe auch den Artikel <http://spie.org/newsroom/3328-the-dangerous-dark-companion-of-bright-green-lasers>



Typical Green DPSS Laser Pointer Using MCA

Die Original-Bildunterschrift ist:
 „Schematic of the operation of a green laser pointer (GLP) based on a multiple-crystal assembly (MCA). The familiar external package contains two AAA batteries that power the unit, a printed circuit board with the pump laser-diode (LD) driving circuitry, and a diode-pumped solid-state (DPSS) laser module. The 808nm pump LD is optically coupled to the Nd:YVO4 (neodymium-doped yttrium vanadate) conversion crystal (violet section of the MCA), which emits 1064nm light into the KTP (potassium titanyl phosphate) frequency-doubling crystal (light-blue section). The 532nm light from the KTP crystal is sent through an expanding and collimating (i.e., nonfocusing) lens assembly to produce a collimated output beam.

In this configuration, an IR filter prevents the 808 and 1064nm light from exiting the laser. In the GLP discussed here, no IR filter was present. OC: Output coupler. AR: Antireflectivity. HR: High reflectivity. HT: High transmissivity. (Figure credit: Samuel M. Goldwasser)“

- Anschluss-Schema des Schiebewiderstands und des Fotowiderstands an das Sensor-CASSY.

