Hookesches Gesetz, mechanische Schwingungen und Resonanz

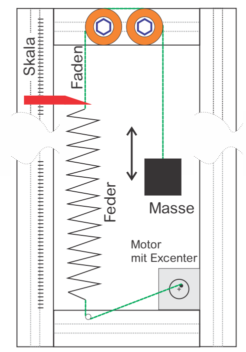
Die elastische Deformation/Dehnung von Festkörpern ist ein Teilgebiet der Mechanik. Das Hookesche Gesetz beschreibt den linearen Zusammenhang zwischen der Spannung σ und der Dehnung ε auf Grund der reversiblen Abstandsvergrößerung zwischen Atomen/Ionen/Molekülen. Bei Elastomeren (Gummi) hingegen liegt eine Streckung der Polymerketten vor. Die Resonanz ist das verstärkte Mitschwingen eines schwingfähigen Systems bei einer periodischen Anregung mit einer Frequenz in der Nähe der Eigenfrequenz. Sie tritt bei einer Vielzahl von Anwendungen auf.

1 Lernziele

- Hooke'sches Gesetz bei Festkörpern
- Spannungs/Dehnungs–Diagramm bei Elastomeren
- Schwingungen und deren Kenngrößen wie Amplitude, Frequenz, Kreisfrequenz, Periodendauer, ...
- Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ eines harmonischen Oszillators
- Resonanzverhalten in der Nähe der Eigenfrequenz beim angeregten harmonischen Oszillator mit schwacher und starker Dämpfung

2 Experimenteller Aufbau

- Metallrahmen mit Messlatte, Messunsicherheit $u(\ell) = 1\,\mathrm{mm}$
- Messchieber, Messunsicherheit $u(\ell) = 0.1\,\mathrm{mm}$
- Gewichtssatz
- Elastomerband (Gummiband) für den Spannungs-Dehnungs-Versuch
- Torsions(Spiral)feder, Masse $m_F = (105 \pm 2)\,\mathrm{g}$
- Stoppuhr, $u(T) = 0.1\,\mathrm{s}$
- Schrittmotor mit Steuerung zur Anregung der Schwingungen



3 Messungen

a) Messen Sie das Spannungs-Dehnungsdiagramm $\sigma(\varepsilon)$ eines Elastomers (Gummiband).
b) Messen Sie das Kraft-Weg-Diagramm $F(\Delta\ell)$ für die Torsionsfeder und ermitteln Sie daraus die Federkonstante k – statische Methode.
c) Messen Sie die Amplitude $A_1(f)$ der Schwingung als Funktion der Anregungsfrequenz f ohne zusätzliche Dämpfung.

4 Versuchsdurchführung

4a) Spannungs-Dehnungsdiagramm – Elastomer

- Für die Berechnung der Spannung $\sigma = F/A$ benötigen Sie die Fläche A des Elastomers wenn keine Belastung vorliegt (Ausgangsquerschnitt). Bestimmen Sie die Maße des rechteckigen Querschnitts mit dem Messschieber. Messen Sie die Länge ℓ_0 des Elastomers in ungedehnten Zustand mit der Messlatte am Rahmen. Diese benötigen Sie für die Bestimmung der Dehnung $\varepsilon = (\ell - \ell_0)/\ell_0 = \Delta\ell/\ell_0$. Notieren Sie ebenfalls die von Ihnen abgeschätzten Messunsicherheiten.

- Verwenden Sie den Aufbau 8(a) und messen Sie die Längenzunahme $\Delta\ell$ des Elastomers für zunehmende Belastungen mit $F_i = m_i g$. Verwenden Sie dazu den Gewichtssatz und kombinieren Sie die Gewichte. Lassen Sie den Gummi bei Gewichtserhöhung nicht relaxieren. Dehnen Sie den Gummi -Vorsichtig!- bis kurz vor dem Reißen.

4b) Kraft-Weg-Diagramm der Torsionsfeder – statische Methode

- Verwenden Sie den Aufbau 8(a) und messen Sie die Längenzunahme $\Delta\ell$ der Torsionsfeder bei einer Belastung mit Gewichten in 100 g Schritten bis zur Maximalbelastung von 1 kg.

4c) Amplitude des angeregten harmonischen Oszillators – Resonanz

- Für das Experiment – *angeregter Oszillator mit Dämpfung* – verwenden Sie den Aufbau 8(b) mit der Masse $m_1 = 600\,\mathrm{g}$. Bereits die Reibung der Kugellager ist eine kleine aber deutlich messbare Dämpfung für das System. Notieren Sie sich die Ruheposition l_0 der Masse. Mit Hilfe der Motorsteuerung können Sie dieses System mit einer variablen Frequenz f anregen. Nach dem Einschalten der Anregung beginnt sich das System einzuschwingen. Nach wenigen Sekunden ist das System eingeschwungen und es stellt sich eine konstante Auslenkamplitude $A_1(f) = \Delta\ell$ ein. Ermitteln Sie die Abhängigkeit der Auslenkamplitude für Frequenzen im Bereich von 0.5 Hz bis 2 Hz. In der Umgebung der Resonanzfrequenz erhöhen Sie die Anregungsfrequenz nur noch in sehr kleineren Schritten, um mehr Datenpunkte zu erhalten.

  !!! Achtung !!! Bei einer eingestellten Frequenz in der unmittelbaren Nähe der Resonanzfrequenz kann es passieren dass die Amplitude stetig weiter anwächst. Halten Sie in diesem Fall die Masse und die Feder fest und stoppen Sie die Anregung. !!! Verletzungsgefahr !!!

  Für diese Frequenzen können Sie kein $A_1(f)$ bestimmen. Für alle anderen Messpunkte ist es nicht nötig, das System zwischen den Frequenzwechseln anzuhalten, dennoch müssen Sie abwarten, bis sich das System erneut eingeschwungen hat. Danach bestimmen Sie die die Auslenkamplitude.

5 Auswertungen

5a) Spannungs-Dehnungsdiagramm – Elastomer

- Berechnen Sie die Ausgangsquerschnittsfläche A und die zugehörige relative Unsicherheit $u_{rel}(A)$ und die Unsicherheit $u(\sigma)$ für den Messpunkt mit der maximalen Dehnung. Siehe auch Kap. 8 Zusatzmaterial.
- Berechnen Sie in drei weiteren Spalten Ihrer Tabelle die Dehnung ε, die zugehörigen Spannungen σ in $\mathrm{N/m^2} = \mathrm{Pa}$ und tragen Sie in der dritten Spalte für den Messpunkt mit der maximalen Dehnung die absolute Unsicherheit $u(\sigma)$ ein. Stellen Sie $\sigma(\varepsilon)$ als `Line+Symbol`-Plot dar, einschließlich des Fehlerbalkens für den letzten Messpunkt. Was sind die Unterschiede zwischen dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines Elastomers und dem Diagramm bei Festkörpern wie zum Beispiel Stahl?

5b) Kraft-Weg-Diagramm der Torsionsfeder – statische Methode

- Erstellen Sie das Kraft-Weg-Diagramm $F(\Delta\ell)$ und bestimmen Sie durch lineare Regression von $F = k \cdot \Delta\ell$ die Federkonstante k der verwendeten Torsionsfeder in N/m. Beachten Sie, dass die Regression durch den Koordinatenursprung gehen muss.

5c) Amplitude des angeregten harmonischen Oszillators – Resonanz

- Erstellen Sie das Diagramm $A_1(f)$ als `Scatter-Plot`. Zusätzlich soll ein angepasster theoretischer Funktionsverlauf eingetragen werden. Nutzen Sie `Analyze -> Fit Wizard` für eine `User Defined Function`, siehe Zusatzmaterial in Kap. 8 um die Amplitudenfunktion zu definieren und die Anpassung durchführen. Beachten Sie dabei, dass Sie dem Algorithmus sinnvolle Anfangswerte für A_0, f_0 und δ vorgeben. Notieren Sie die bestimmte Eigenfrequenz und Dämpfung in der korrekten Einheit im Diagramm.

Zusätzliche Messungen

3d) Bestimmen Sie die Eigenfrequenz des ungedämpften Federschwingers und ermitteln Sie daraus die Federkonstante – dynamische Methode, siehe 4d)

3e) Messen Sie die Amplitude $A_2(f)$ der Schwingung als Funktion der Anregungsfrequenz f wenn eine zusätzliche Wirbelstromdämpfung durch Magnete vorliegt, siehe 4e)

Zusätzliche Versuchsdurchführung

4d) Verwenden Sie den Aufbau 8(a) mit der Torsionsfeder. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen f_1 und f_2 der Feder-Gewicht-Kombinationen für die zwei Gewichte $m_1 = 300\,\mathrm{g}$ und $m_2 = 600\,\mathrm{g}$. Lenken Sie dazu die Massen vertikal aus und lassen Sie diese frei schwingen. Bestimmen Sie die Periodendauer T der (fast) ungedämpften Schwingung aus der gemessenen Zeit für mehrere Schwingungsperioden. Dies erhöht die Genauigkeit der der Periodendauerbestimmung (siehe Vorversuch Fadenpendel).

4e) Verwenden Sie den Aufbau zur getriebenen Oszillation mit einer zusätzlichen kontaktlosen Wirbelstrombremse –Dauermagnete bei der mitdrehenden Cu-Scheibe– und messen Sie den Zusammenhang Amplitude $A_2(f)$.

Zusätzliche Auswertungen

5d) Berechnen Sie die Federkonstante k aus den zwei ermittelten Eigenfrequenzen $f_0^{1,2}$ bzw. $\omega_0^{1,2}$ mit $\omega_0^{1,2} = \sqrt{k/(m_{1,2} + m_F/3)}$ mit der Federmasse m_F. Vergleichen Sie die ermittelten k-Werte. Welche Methode ergibt Ihrer Meinung nach das genauste k? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

5e) Tragen Sie die Messpunkte $A_2(f)$ in die selbe Darstellung ohne zusätzliche Dämpfung ein. Bestimmen Sie ebenfalls A_0, f_0 und δ.

6 Vorbereitung, Fragen und Berechnungen vor Versuchsantritt

Erarbeiten Sie sich einen Überblick zu folgenden Schlagwörtern (siehe auch 7 Literatur und 8 Zusatzmaterial)

- Hooksches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm
- Schematischer Aufbau von Elastomeren
- harmonischer Oszillator ohne Dämpfung und ohne Anregung: $y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$
  Lösung $y(t)$, Eigenfrequenz
- harmonischer Oszillator mit Dämpfung und Anregung: $y''(t) + 2\delta y'(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{F}{m}\cos(2\pi f t)$
  Amplitude $A(f)$ des eingegeschwungenen Systems, Eigenfrequenz f_0 und Resonanzfrequenz f_R, Dämpfung δ, Phasenverschiebung zwischen Anregung und Systemantwort

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben:

a) Skizzieren Sie das Spannungs-Dehnungs-Diagramm $\sigma(\varepsilon)$ eines Festkörpers und eines Elastomers.

b) Was ist die Definition des Elastizitätsmoduls E? Wo findet sich dieses in $\sigma(\varepsilon)$ wieder?

c) Welchen Wert nimmt die Amplitude $A(f)$ des angeregten harm. Oszillators für die Grenzfälle $f \to 0$ und $f \to \infty$ an?

7 Literatur

In der Referenz [1] finden Sie eine ausführliche Darstellung zur Gummielastizität. Interessierte Leser finden in [2, Kap. M3.3] eine exakte Herleitung des Zusammenhanges zwischen dem Torsionsmodul G des Federmaterials und der Federkonstante k (dort als c bezeichnet). Des Weiteren finden Sie dort die Begründung, warum die effektive Masse bei der Federschwingung $m + m_F/3$ ist. Der harmonische Oszillator wird an mehreren Stellen in diesem Buch behandelt. Ebenfalls ist der Wikipediaartikel zur Resonanz lesenswert `https://de.wikipedia.org/wiki/Resonanz`. Ein Video in der Wikipedia verdeutlicht Ihnen, welche Auswirkungen die Resonanz haben kann `https://de.wikipedia.org/wiki/Tacoma-Narrows-Br%C3%BCcke`.

[1] Lehrstuhl für Physikalische Chemie der Universität zu Köln. *Gummielastizität*. 2009. URL: `http://strey.pc.uni-koeln.de/fileadmin/user_upload/Download/Gummielastizitaet_final_12052009.pdf`.

[2] W. Schenk und F. Kremer (Hrsg.) *Physikalisches Praktikum*. Springer, 14. Auflage, 2014. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-00666-2`.

8 Zusatzmaterial

- Die beschreibende Differentialgleichung des angeregten harmonischen Oszillators mit Dämpfung ist:

$$y''(t) + 2\delta y'(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{F}{m}\cos(2\pi f t) \quad . \tag{1}$$

  Nach dem Einschwingen ergibt sich die Lösung zu:

$$y(t) = A(f)\cos(2\pi f t - \varphi) \quad \text{mit der Amplitude} \quad A(f) = A_0 \frac{f_0^2}{\sqrt{(f_0^2 - f^2)^2 + \delta^2 f^2/\pi^2}} \tag{2}$$

  Außerdem besteht zwischen der Anregung und der Antwort eine Phasenverschiebung φ. Bei sehr kleinen Frequenzen ist die Antwort ohne Phasenverschiebung und bei sehr großen Frequenzen ist die Antwort im Gegentakt. Besonders in der Nähe der Resonanzfrequenz können Sie die zeitliche Verschiebung zwischen den beiden Schwingungen beobachten.

- Größtfehlerrechung für $\sigma = F/A$: Wenn die Formel nur Produkte und Quotienten enthält, addieren sich die relativen Fehler da:

$$\sigma = F/(a\cdot b); \quad u(\sigma) = \left|\frac{\partial}{\partial F}\sigma\Big|_{F,a,b}\right| u(F) + \left|\frac{\partial}{\partial a}\sigma\Big|_{F,a,b}\right| u(a) + \left|\frac{\partial}{\partial b}\sigma\Big|_{F,a,b}\right| u(b) \tag{3}$$

$$= \frac{1}{a\cdot b}\Big|_{F,a,b} u(F) + \frac{F}{a^2\cdot b}\Big|_{F,a,b} u(a) + \frac{F}{a\cdot b^2}\Big|_{F,a,b} u(b) \quad . \tag{4}$$

  Durch Einsetzen zeigt sich, der rel.Fehler von σ ist die Summe der rel. Fehler von F, a und b

$$u_{rel}(\sigma) = \frac{u(\sigma)}{\sigma} = \frac{u(F)}{F} + \frac{u(a)}{a} + \frac{u(b)}{b} \qquad ☺. \tag{5}$$

- Aufbau